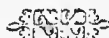
FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS

LIBER DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM.



CVM PRIVILEGIO IN ANNOS X.

BONONIAE,

Ex Officina Alexandri Benacii.

M D LXV.

ALEXANDRO FARNESIO
CARDINALI AMPLISSIMO,
ET OPTIMO.



VM multæ res in mathematicis diſciplinis nequaquam ſatis adhuc explicatæ ſint, tum perdifficilis, & perobſcura quæſtio eſt de centro grauitatis corporum ſolidorum; quæ, & ad cognoſcendum pulcherrima eſt, & ad multa, quæ à mathematicis proponuntur, præclare intelligenda maximum affert adiumentum. de qua neminem ex mathematicis, neque noſtra, neque patrum noſtrorum memoria ſcriptum reliquiſſe ſcimus. & quamuis in earum monumentis literarum nō nulla reperiantur, ex quibus in hanc ſententiam adduci poſſumus, vt exiſtimemus hanc rem ab ijſdē vberrime tractatam eſſe; tamen neſcio quo fato adhuc in eiuſmodi librorum ignoratione verſamur. Archimedes quidem mathematicorū princeps in libello, cuius inſcriptio eſt, κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων, de centro planorum copioſiſsime, atque acutiſsime conſcripſit: & in eo explicando ſummā ingenii, & ſcientiæ gloriā eſt cōſecutus. Sed de cognitione cētri grauitatis corporū ſolidorū nulla in eius libris litera inuenitur. non multos abhinc annos MARCELLVS II. PONT. MAX.

cum adhuc Cardinalis esset, mihi, quæ sua erat humanitas, libros eiusdem Archimedis de ijs, quæ vehuntur in aqua, latine redditos dono dedit. hos cum ego, ut aliorum studia incitarem, emendãdos, & cõmentariis illustrandos suscepissem, animaduerti dubitari non posse, quin Archimedes vel de hac materia scripsisset, vel aliorum mathematicorum scripta perlegisset. nam in iis tum alia nonnulla, tum maxime illam propositionem, ut euidentem, & aliàs probatam assumit, Centrũ grauitatis in portionibus conoidis rectanguli axem ita diuidere, vt pars, quæ ad verticem terminatur, alterius partis, quæ ad basim dupla sit. Verum hæc ad eam partem mathematicarum disciplinarum præcipue refertur, in qua de centro grauitatis corporum solidorum tractatur. non est autem consentaneum Archimedem illum admirabilem virum hanc propositionem sibi argumentis confirmandam existimaturum non fuisse, nisi eam vel aliis in locis probauisset, vel ab aliis probatam esse comperisset. quamobrem nequid in iis libris intelligendis desiderari posset, statui hanc etiam partem vel à veteribus prætermissam, vel tractatam quidem, sed in tenebris iacentem, non intactam relinquere; atque ex assidua mathematicorum, præsertim Archimedis lectione, quæ mihi in mentem venerunt, ea in medium afferre; ut centri grauitatis corporum solidorum, si non perfectam, at certe aliquam noti-

tiam haberemus. Quem meum laborem nō mathematicis solum, verum iis etiam, qui naturæ obscuritate delectantur, nō iniucundam fore speraui: multa enim προβλήματα cognitione dignissima, quæ ad vtrãque scientiam attinent, sese legentibus obtulissent. neque id vlli mirandum videri debet. vt enim in corporibus nostris omnia membra, ex quibus certa quædam officia nascuntur, diuino quodam ordine inter se implicata, & colligata sunt: in iisq; admirabilis illa conspiratio, quam σύμπνοιαν græci vocant, elucescit, ita tres illæ Philosophiæ (ut Aristotelis verbo vtar) quæ veritatem solam propositam habent, licet quibusdam quasi finibus suis regantur: tamen earũ vnaquæque per se ipsam quodammodo imperfecta est: neque altera sine alterius auxilio plene comprehendi potest. complures præterea mathematicorum nodi ante hac explicatu difficillimi nullo negotio expediti essent: atque (ut vno verbo complectar) nisi mea valde amo, tractationem hanc meam studiosis non mediocrem vtilitatem, & magnam voluptatem allaturam esse mihi persuasi. cum autem ad hoc scribendum aggressus essem, allatus est ad me liber Francisci Maurolici Messanensis, in quo vir ille doctissimus, & in iis disciplinis exercitatissimus affirmabat se de centro grauitatis corporum solidorum conscripsisse. cum hoc intellexissem, sustinui me paulisper: tacitus'que expectaui, dum opus cla-

risſimi uiri, quem ſemper honoris cauſſa nomino, in lucem proferretur: mihi enim exploratisſimum erat: Franciſcum Maurolicum multo doctius, & exquiſitius hoc diſciplinarum genus ſcriptis ſuis tra diturum. ſed cum id tardius fieret, hoc eſt, ut ego interpretor, diligentius, mihi diutius hac ſcriptione non ſuperſedendum eſſe duxi, præſertim cum iam libri Archimedis de iis, quæ uehuntur in aqua, opera mea illuſtrati typis excudēdi eſſent. nec me alia cauſ ſa impuliſſet, ut de centro grauitatis corporum ſolidorum ſcriberem, niſi ut hac etiam ratione lux eis quàm maxime fieri poſſet afferretur. atq; id eò mihi faciendum exiſtimaui, quòd in ſpem ueniebam fore, ut cum ego ex omnibus mathematicis primus, hanc materiam explicandam ſuſcepiſſem; ſi quid errati for te à me commiſſum eſſet, boni uiri potius id meæ de ſtudioſis hominibus bene merēdi cupiditati, quàm arrogantiæ aſcriberent. reſtabat ut conſiderarem, cui potisſimum ex principibus uiris contemplationem hanc, nunc primum memoriæ, ac literis proditam de dicarem. harum mearum cogitationum ſumma facta, exiſtimaui nemini conuenientius de centro grauitatis corporum opus dicari oportere, quàm ALEXANDRO FARNESIO grauisſimo, ac prudentisſimo Cardinali, quo in uiro ſumma fortuna ſemper cū ſumma uirtute certauit. quid enim maxime in te admirari debeant homines, obſcurum eſt; uſum'ne re-

rum,qui pueritiæ tempus extremum principium ha buisti,& imperiorũ, & ad Reges,& Imperatores honorificentiſsimarum legationum; an excellentiam in omni genere literarum,qui vix adoleſcẽtulus,quæ homines iam confirmata ætate ſummo ſtudio, diuturnisq; laboribus didicerunt, ſcientia,& cognitione comprehendiſti: an conſilium, & ſapientiam in regendis, & gubernãdis Ciuitatibus,cuius grauiſsimæ ſententiæ in ſanctiſsimo Reip. Chriſtianæ conſilio dictæ, potius diuina oracula, quàm ſententiæ habitæ ſunt, & habentur. prætermitto liberalitatem,& munificentiam tuam,quam in ſtudioſiſsimo quoque ho neſtando quotidie magis oſtendis, ne videar auribus tuis potius,quàm veritati ſeruire.quamuis à te in tot præclaros viros tanta beneficia collata ſunt, & conferũtur, vt omnibus teſtatum ſit,nihil tibi eſſe charius, nihil iucundius, quàm eximia tua liberalitate homines ad amplexandam virtutem,licet currentes incitare. nihil dico de ceteris virtutibus tuis, quæ tantæ ſunt, quantæ ne cogitatione quidem comprehendi poſſunt. Quamobrem hac præcipue de cauſſa te huius meæ lucubrationis patronum eſſe volui, quam ea, qua ſoles, humanitate accipies. te enim ſemper ob diuinas virtutes tuas colui, & obſeruaui: nihilq; mihi fuit optatius; quàm tibi perſpectum eſſe meum erga te animum; ſingularemq; obſeruantiam. cœlum igitur digito attingam, ſi poſt grauiſsimas oc-

cupationes tuas legendo Federici tui libro aliquid impertiri temporis non grauaberis: eumq; in iis, qui tibi semper addicti erunt, numerare. Vale.

Federicus Commandinus.

FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS LIBER DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM.

DIFFINITIONES.



CENTRVM grauitatis, Pappus Alexandrinus in octauo mathematicarum collectionum libro ita diffiniuit. 1

λέγομεν δὲ κέντρον βάρους ἑκάστου σώματος εἶναι σημεῖόν τι κείμενον ἐντός, ἀφ' οὗ κατ' ἐπίνοιαν ἀρτηθὲν τὸ βάρος ἠρεμεῖ φερόμενον, καὶ φυλάσσει τὴν ἐξ ἀρχῆς θέσιν, οὐ μὴ περιτρεπόμενον ἐν τῇ φορᾷ. hoc est,

Dicimus autem centrum grauitatis uniuscuiusque corporis punctum quoddam intra positum, à quo si graue appensum mente concipiatur, dum fertur quiescit; & seruat eam, quam in principio habebat positionem: neque in ipsa latione circumuertitur.

Possumus etiam hoc modo diffinire.

Centrum grauitatis uniuscuiusque solidæ figuræ est punctum illud intra positum, circa quod undique partes æqualium momentorum consistunt. si enim per tale centrum ducatur planum figuram quomodocunque secans semper in par-

tes, æqueponderantes ipsam diuidet.

2 Prismatis, cylindri, & portionis cylindri axem appello rectam lineam, quæ oppositorum planorum centra grauitatis coniungit.

3 Pyramidis, coni, & portionis coni axem dico lineam, quæ à uertice ad centrum grauitatis basis perducitur.

4 Si pyramis, conus, portio coni, uel conoidis secetur plano basi æquidistante, pars, quæ est ad basim, frustum pyramidis, coni, portionis coni, uel conoidis dicetur; quorum plana æquidistantia, quæ opponuntur similia sunt, & inæqualia: axes uero sunt axium figurarum partes, quæ in ipsis comprehenduntur.

PETITIONES.

1 Solidarum figurarum similium centra grauitatis similiter sunt posita.

2 Solidis figuris similibus, & æqualibus inter se aptatis, centra quoque grauitatis ipsarum inter se aptata erunt.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Omnis figuræ rectilineæ in circulo descriptæ, quæ æqualibus lateribus, & angulis contine-

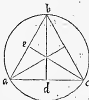
tur, centrum grauitatis est idem, quod circuli centrum.

Sit primo triangulum æquilaterum a b c in circulo descriptum: & diuisa a c bifariam in d, ducatur b d. erit in linea b d centrum grauitatis trianguli a b c, ex tertia decima primi libri Archimedis de centro grauitatis planorum. Et quoniam linea a b est æqualis lineæ b c; & a d ipsi d c; estq; b d utrique communis: triangulum a b d æquale erit triangulo c b d: & anguli angulis æquales, qui æqualibus lateribus subtenduntur. ergo anguli ad d utriq; recti sunt. quod cum linea b d secet a c bifariam, & ad angulos rectos; in ipsa b d est centrum circuli, quare in eadem b d linea erit centrum grauitatis trianguli, & circuli centrum. Similiter diuisa a b bifariam in e, & ducta c e, ostendetur in ipsa utrũque centrum contineri. ergo ea erunt in puncto, in quo lineæ b d, c e conueniunt. trianguli igitur a b c centrum grauitatis est idem, quod circuli centrum.

8.primi.

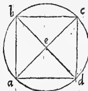
13.primi.

corol.primæ tertii



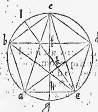
Sit quadratum a b c d in circulo descriptum: & ducantur a c, b d, quæ conueniant in e. ergo punctum e est centrum grauitatis quadrati, ex decima eiusdem libri Archimedis. Sed cum omnes anguli ad a b c d recti sint; erit a b c semicirculus: itemq; b c d: & propterea lineæ a c, b d diametri circuli:

31.tertii.



quæ quidem in centro conueniunt. idem igitur est centrum grauitatis quadrati, & circuli centrum.

Sit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum in circulo descriptum a b c d e: & iuncta b d, bifariamq; in f diuisa, ducatur c f, & producatur ad circuli circumferentiam in g; quæ lineam a e in h secet: deinde iungantur a c, c e. Eodem modo, quo supra demonstrabimus angulum b c f æqualem esse angulo d c f; & angulos ad f utrosque rectos: & idcirco lineam c f g per circuli centrum transire. Quoniam igitur latera c b, b a, & c d, d e æqualia sunt; & æquales anguli c b a, c d e: erit basis c a basi c e, & angulus b c a angulo d c e æqualis. ergo & reliquus a c h, reliquo e c h. est autem c h utrique triangulo a c h, e c h communis. quare basis a h æqualis est basi h e: & anguli, qui ad h recti sunt; recti, qui ad f. ergo lineæ a e, b d inter se se æquidistant. Itaque cum trapezij a b d e latera b d, a e æquidistantia à linea f h bifariam diuidantur; centrum grauitatis ipsius erit in linea f h, ex ultima eiusdem libri Archimedis. Sed trianguli b c d centrum grauitatis est in linea c f. ergo in eadem linea c h est centrum grauitatis trapezij a b d e, & trianguli b c d: hoc est pentagoni ipsius centrum: & centrum circuli. Rursus si iuncta a d, bifariamq; secta in k, ducatur e k l: demonstrabimus in ipsa utrumque centrum in esse. Sequitur ergo, ut punctum, in quo lineæ c g, e l conueniunt, idem sit centrum circuli, & centrum grauitatis pentagoni.



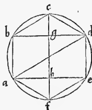
4. primi.

29. primi.

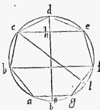
15. Archimedis.

Sit hexagonum a b c d e f æquilaterum, & æquiangulum in circulo designatum: iunganturq; b d, a e: & bifariam se-

&a b d in g puncto, ducatur c g; & protrahatur ad circuli usque circumferentiam; quæ secet a e in h. Similiter conclu demus c g per centrum circuli transire: & bifariam secare lineam a e; itemq; lineas b d, a e inter se æquidistantes esse. Cum igitur c g per centrum circuli transeat; & ad punctũ f perueniat necesse est: quòd c d e f sit dimidium circumfe rentiæ circuli. Quare in eadem diametro c f erunt centra gra uitatis triangulorum b c d, a f e, & quadrilateri a b d e, ex quibus constat hexagonum a b c d e f. perspicuum est igitur in ipsa c f esse circuli centrum, & centrum grauitatis hexagoni. Rursus ducta altera diametro a d, eisdem rationibus ostendemus in ipsa utrumque cẽtrum inesse. Centrum ergo grauitatis hexagoni, & centrum circuli idem erit. 13. Archimedis. 9. eiusdẽ



Sit heptagonum a b c d e f g æquilaterum atque æquian gulum in circulo descriptum: & iungantur c e, b f, a g: diuisa autem c e bifariam in pũcto h: & iuncta d h producatur in k. non aliter demonstrabimus in linea d k esse cen trum circuli, & centrum grauitatis trianguli c d e, & trapeziorum b c e f, a b f g, hoc est centrum totius heptagoni: & rursus eadem centra in alia diametro c l similiter ducta contineri. Quare & centrum grauitatis heptagoni, & centrum circuli in idem punctum conueniunt. Eodem mo



do in reliquis figuris æquilateris, & æquiangulis, quæ in circulo deſcribuntur, probabimus cẽtrum grauitatis earum, & centrum circuli idem eſſe. quod quidem demonſtrare oportebat.

Ex quibus apparet cuiuslibet figuræ rectilineæ in circulo plane deſcriptæ centrum grauitatis idẽ eſſe, quod & circuli centrum.

γνωρίμως Figuram in circulo plane deſcriptam appellamus, cuiuſmodi eſt ea, quæ in duodecimo elementorum libro, propoſitione ſecunda deſcribitur. ex æqualibus enim lateribus, & angulis conſtare perſpicuum eſt.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

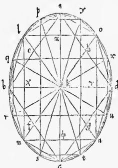
Omnis figuræ rectilineæ in ellipſi plane deſcriptæ centrum grauitatis eſt idem, quod ellipſis centrum.

Quo modo figura rectilinea in ellipſi plane deſcribatur, docuimus in commentarijs in quintam propoſitionem libri Archimedis de conoidibus, & ſphæroidibus.

Sit ellipſis a b c d, cuius maior axis a c, minor b d: iunganturq; a b, b c, c d, d a: & biſariam diuidantur in punctis e f g h. à centro autem, quod ſit k ductæ lineæ k e, k f, k g, k h uſque ad ſectionem in puncta l m n o protrahantur: & iungantur l m, m n, n o, o l, ita ut a c ſecet lineas l o, m n, in z φ punctis, & b d ſecet l m, o n in χ ψ. erunt l k, k n linea una, itemq́ue linea una ipſæ m k, k o: & lineæ b a, c d æquidiſtabunt lineæ m o: & b c, a d ipſi l n. rurſus l o, m n axi b d æquidiſtabunt: & l m,

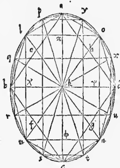
o n

o n ipsi a c. Quoniam enim triangulorum a b k, a d k, latus b k est æquale lateri k d, & a k utrique commune; angulíq; ad k recti basis a b basi a d; & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt. eadem quoque ratione ostendetur b c 8. primi
æqualis c d; & a b ipsi b c. quare omnes a b, b c, c d, d a sunt æquales. & quoniam anguli ad a æquales sunt angulis ad c; erunt anguli b a c, a c d coalterni inter se æquales; itemq; d a c, a c b. ergo c d ipsi b a; & a d ipsi b c æquidistat. At uero cum lineæ a b, c d inter se æquidistantes bifariam secentur in punctis e g; erit linea l e k g n diameter sectionis, & linea u n a, ex demonstratis in uigesima octaua secundi conicorum.



Et eadem ratione linea u n a m f k h o. Sunt antẽ a d, b c inter se se æquales, & æquidistantes. quare & earum dimidiæ a h, b f; itemq; h d, f c; & quæ ipsas coniungunt rectæ 33. primi
lineæ æquales, & æquidistantes erunt. æquidistãt igitur b a, c d diametro m o: & pariter a d, b c ipsi l n æquidistare ostendemus. Si igitur manẽte diametro a c intelligatur a b c portio ellipsis ad portionem a d c moueri, cum primum b applicuerit ad d, cõgruet tota portio toti portioni, lineaq; b a lineæ a d; & b c ipsi c d congruet: punctum uero e cadet in h; f in g: & linea k e in lineam k h: & k f in k g. quare & e l in h o, et f m in g n. At ipsa l z in z o; et m φ in φ n cadet. congruet igitur triangulum l k z triangulo o k z: et

triangulum m k φ triangulo n k φ. ergo anguli l z k, o z k, m φ k, n φ k æquales sunt, ac recti. quòd cum etiam recti
26. primi. sint, qui ad k; æquidistabunt lineæ l o, m n axi b d. & ita demonstrabuntur l m, o n ipsi a c æquidistare. Rursus si iungantur a l, l b, b m, m c, c n, n d, d o, o a: & bifariam di uidantur: à centro autem k ad diuisiones ductæ lineæ protrahantur usque ad sectionem in puncta p q r s t u x y: & postremo p y, q x, r u, s t, q r, p s, y t, x u coniungantur. Similiter ostendemus lineas p y, q x, r u, s t axi b d æquidistantes esse: & q r, p s, y t, x u æquidistantes ipsi a c. Itaque dico harum figurarum in ellipsi descriptarum centrum grauitatis esse punctum k, idem quod & ellipsis centrum. quadrilateri enim a b c d centrum est k, ex decima eiusdem libri Archimedis, quippe cũ in eo omnes diametri cõueniãt.
13. Archimedis. Sed in figura a l b m c n d o, quoniam trianguli a l b centrum grauitatis
Vltima. est in linea l c: trapezijq; a b m o centrum in linea c k: trapezij o m c d in k g. & trianguli c n d in ipsa g n: erit magnitudinis ex his omnibus constantis, uidelicet totius figuræ centrum grauitatis in linea l n: & ob eandem caussam in linea o m. est enim trianguli a o d centrum in linea o h: trapezij a l n d in h k: trapezij l b c n in k f: & trianguli b m c in f m. cum ergo figuræ a l b m c n d o centrum grauitatis sit in linea l n, & in linea o m; erit centrum ipsius punctum k, in quo



quo scilicet l n, o m conueniunt. Postremo in figura a p l q b r m s c t n u d x o y centrum grauitatis trianguli p a y, & trapezii p l o y est in linea a z: trapeziorum uero l q x o, q b d x centrum est in linea z k: & trapeziorũ b r u d, r m n u in k φ: & denique trapezii m s t n; & trianguli s c t in φ c. quare magnitudinis ex his compositæ centrũ in linea a c consistit. Rursus trianguli q b r, & trapezii q l m r centrum est in linea b χ: trapeziorum l p s m, p a e s, a y t c, y o n t in linea χ φ: trapeziiq; o x u n, & trianguli x d u centrum in ψ d. totius ergo magnitudinis centrum est in linea b d. ex quo sequitur, centrum grauitatis figuræ a p l q b r m s c t n u d x o y esse punctũ κ, lineis scilicet a c, b d commune, quæ omnia demonstrare oportebat.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Cuiuslibet portionis circuli, & ellipsis, quæ dimidia non sit maior, centrum grauitatis in portionis diametro consistit.

HOC eodem prorsus modo demonstrabitur, quo in libro de centro grauitatis planorum ab Archimede demonstratũ est, in portione cõtenta recta linea, & rectanguli coni sectione grauitatis cẽtrum esse in diametro portionis. Et ita demonstrari po

teſt in portione, quæ recta linea & obtuſianguli coni ſectione, ſeu hyperbola continetur.

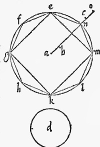
THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

IN circulo & ellipſi idem eſt figuræ & grauitatis centrum.

SIT circulus, uel ellipſis, cuius centrum a. Dico a grauitatis quoque centrum eſſe. Si enim fieri poteſt, ſit b centrum grauitatis: & iuncta a b extra figuram in c producatur: quam uero proportionem habet linea c a ad a b, habeat circulus a ad alium circulum, in quo d; uel ellipſis ad aliam ellipſim: & in circulo, uel ellipſi figura rectilinea plane deſcribatur adeo, ut tandem relinquantur portiones quædam minores circulo, uel ellipſi d; quæ figura ſit e f g h k l m n. Illud uero in circulo fieri poſſe ex duodecimo elementorum libro, propoſitione ſecunda manifeſte conſtat; at in ellipſi nos demonſtrauimus in commentariis in quintam propoſitionem Archimedis de conoidibus, & ſphæroidibus. erit igitur a centrum grauitatis ipſius figuræ, quod proxime oſtẽdimus. Itaque quoniam circulus a ad circulum d; uel ellipſis a ad ellipſim d eandem proportionẽ habet, quam linea c a ad a b: portiones uero ſunt minores cir-

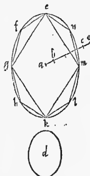
8.quinti. culo uel ellipſi d: habebit circulus, uel ellipſis ad portiones maiorem proportionem, quàm c a

19.quinti apud Cãpanum. ad a b: & diuidendo figura rectilinea e f g h k l m n ad portiones



habebit

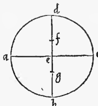
habebit maiorem proportionē, quam c b ad b a. fiat o b ad b a, ut figura rectilinea ad portiones. cum igitur à circulo, uel ellipsi, cuius grauitatis centrum est b, auferatur figura rectilinea e f g h k l m n, cuius centrum a; reliquæ magnitudinis ex portionibus compositæ centrum grauitatis erit in linea a b producta, & in puncto o, extra figuram posito. quod quidem fieri nullo modo posse perspicuum est. sequitur ergo, ut circuli & ellipsis centrum grauitatis sit punctum a, idem quod figuræ centrum.

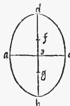


8. Archimedis.

ALITER.

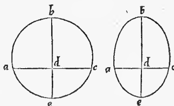
Sit circulus, uel ellipsis a b c d, cuius diameter d b, & centrum e: ducaturq; per e recta linea a c, secans ipsam d b ad rectos angulos. erunt a d c, a b c circuli, uel ellipsis dimidiæ portiones. Itaque quoniam portiōis a d c cētrū grauitatis est in diametro d e: & portionis a b c centrum est ĩ ipsa e b: totius circuli, uel ellipsis grauitatis centrum erit in diametro d b. Sit autem portionis a d c cētrum grauitatis f: & sumatur





in linea e b punctũ g, ita ut sit g e æqualis e f. erit g portionis a b c centrum. nam si hæ portiones, quæ æquales & similes sunt, inter se se aptentur, ita ut b e cadat in d e, & punctum b in d cadet, & g in f: figuris autem æqualibus, & similibus inter se aptatis, centra quoque grauitatis ipsarum inter se aptata erunt, ex quinta petitione Archimedis in libro de centro grauitatis planorum. Quare cum portionis a d c centrum grauitatis sit f: & portionis a b c centrum g: magnitudinis; quæ ex utrisque efficitur: hoc est circuli uel ellipsis grauitatis centrum in medio lineæ f g, quod est e, consistet, ex quarta propositione eiusdem libri Archimedis. ergo circuli, uel ellipsis centrum grauitatis est idem, quod figuræ centrum. atque illud est, quod demonstrare oportebat.

Ex quibus sequitur portionis circuli, uel ellipsis, quæ dimidia maior sit, centrum grauitatis in diametro quoque ipsius consistere.



Sit enim maior portio a b c, cuius diameter b d, & compleatur circulus, uel ellipsis, ut portio reliqua sit a e c, dia

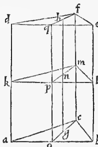
metrum

metrum habens e d. Quoniam igitur circuli uel ellipsis a e c b grauitatis centrum est in diametro b c, & portionis a e c centrum in linea e d: reliquæ portionis, uidelicet a b c centrum grauitatis in ipsa b d consistat necesse est, ex octaua propositione eiusdem.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

SI prisma secetur plano oppositis planis æquidistante, sectio erit figura æqualis & similis ei, quæ est oppositorum planorum, centrum grauitatis in axe habens.

Sit prisma, in quo plana opposita sint triangula a b c, d e f; axis g h: & secetur plano iam dictis planis æquidistãte; quod faciat sectionem k l m; & axi in pũcto n occurrat. Dico k l m triangulum æquale esse, & simile triangulis a b c d e f; atque eius grauitatis centrum esse punctum n. Quoniam enim plana a b c K l m æquidistantia secãtur a plano a e; rectæ lineæ a b, K l, quæ sunt ipsorum cõmunes sectiones inter se se æquidistant. Sed æquidistant a d, b c; cum a e sit parallelogrammum, ex prismatis diffinitione. ergo & a l parallelogrammũ erit; & propterea linea k l, ipsi a b æqualis. Similiter demonstrabitur l m æquidistans, & æqualis b c; & m k ipsi c a.



16. undecimi.

34. primi

Itaque quoniam duæ lineæ K l, l m se se tangentes, duabus lineis se se tangentibus a b, b c æquidistant; nec sunt in eodem plano: angulus K l m æqualis est angulo a b c: & ita angulus l m K, angulo b c a, & m K l ipsi c a b æqualis probabitur. triangulum ergo K l m est æquale, & simile triangulo a b c. quare & triangulo d e f. Ducatur linea c g o, & per ipsam, & per c f ducatur planum secans prisma, cuius & parallelogrammi a e communis sectio sit o p q. transibit linea f q per h, & m p per n. nam cum plana æquidistantia secentur à plano c q, communes eorum sectiones c g o, m p, f q sibi ipsis æquidistabunt. Sed & æquidistant a b, K l, d e. anguli ergo a o c, K p m, d q f inter se æquales sunt: & sunt æquales qui ad puncta a K d constituuntur. quare & reliqui reliquis æquales; & triangula a c o, K m p, d f q inter se similia erunt. Vt igitur c a ad a o, ita f d ad d q: & permutando ut c a ad f d, ita a o ad d q. est autem c a æqualis f d. ergo & a o ipsi d q. eadem quoque ratione & a o ipsi K p æqualis demonstrabitur. Itaque si triangula, a b c, d e f æqualia & similia inter se aptétur, cadet linea f q in lineam c g o. Sed & centrũ grauitatis h in g centrũ cadet. trãsibit igitur linea f q per h: & planum per c o & c f ductũ per axẽ g h ducetur: idcircoq; lineam m p etiã per n trãsire necesse erit. Quoniam ergo f h, c g æquales sunt, & æquidistãtes: itemq; h q, g o; rectæ lineæ, quæ ipsas cõnectũt c m f, g n h, o p q æquales & æquidistãtes erũt.

10. undecimi

10. undecimi

4. sexti

per 5. petitionem Archimedis.

æqui-

æquidiſtant autem c g o, m n p. ergo parallelogrãma ſunt o n, g m, & linea m n æqualis c g; & n p ipſi g o. aptatis igitur k l m, a b c triãgulis, quæ æqualia & ſimilia sũt; linea m p in c o, & punctum n in g cadet. Quòd cũ g ſit centrum grauitatis trianguli a b c, & n trianguli k l m grauitatis centrum erit id, quod demonſtrandum relinquebatur. Simili ratione idem contingere demonſtrabimus in aliis priſmatibus, ſiue quadrilatera, ſiue plurilatera habeant plana, quæ opponuntur.

COROLLARIVM.

Ex iam demonſtratis perſpicue apparet, cuius libet priſmatis axem, parallelogrammorum lateri bus, quæ ab oppoſitis planis ducũtur æquidiſtare.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

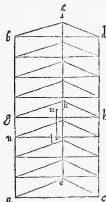
Cuiuslibet priſmatis centrum grauitatis eſt in plano, quod oppoſitis planis æquidiſtans, reliquorum planorum latera bifariam diuidit.

Sit priſma, in quo plana, quæ opponuntur ſint triangula a c e, b d f: & parallelogrammorum latera a b, c d, e f bifariam diuidãtur in punctis g h k: per diuiſiones autem planum ducatur; cuius ſectio figura g h k. erit linea g h æquidiſtans lineis a c, b d & h k ipſis c e, d f. quare ex decimaquinta undecimi elementorum, planum illud pla nis a c e, b d f æquidiſtabit, & faciet ſectionem figuram ipſis æqualem, & ſimilem, ut proxime demonſtrauimus. Dico centrum grauitatis priſmatis eſſe in plano g h k. Si enim fieri poteſt, ſit eius centrum l: & ducatur l m uſque ad planum g h k, quæ ipſi a b æquidiſtet.

33. primi

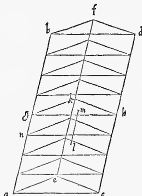
5. huius

1. decimi ergo linea a g continenter in duas partes æquales diui-
sa, relinquetur tãdem pars aliqua n g, quæ minor erit l m.
Vtraque uero linearum a g, g b diuidatur in partes æqua-
5 huius les ipsi n g: & per puncta diuisionum plana oppositis pla-
nis æquidistantia ducantur. erunt sectiones figuræ æqua-
les, ac similes ipsis a c e, b d f: & totum prisma diuisum erit
in prismata æqualia, & similia: quæ cum inter se congruãt;
& grauitatis centra sibi ipsis congruentia, respondentiaq;
habebunt. Itaq; sunt magnitudines quædã æquales ipsi n h, & numero pares, quarum centra grauitatis in eadẽ recta linea constituuntur: duæ uero mediæ æquales sunt: & quæ ex utraque parte ipsarum similiter æquales: & æquales rectæ lineæ, quæ inter grauitatis centra interiiciuntur. quare ex corollario quintæ propositionis primi libri Archimedis de centro grauitatis planorum; magnitudinis ex his omnibus compositæ centrum grauitatis est in medio lineæ, quæ magnitudinum mediarum centra coniungit. at qui non ita res habet,



bet,

bet, si quidem l extra medias magnitudines positum est. Constat igitur centrum grauitatis prismatis esse in plano

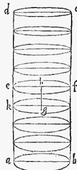


g h k, quod nos demonstrandum proposuimus. At si opposita plana in prismate sint quadrilatera, uel plurilatera, eadem erit in omnibus demonstratio.

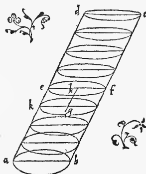
THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Cuiuslibet cylindri, & cuiuslibet cylindri portionis centrum grauitatis est in plano, quod basibus æquidistans, parallelogrammi per axem latera bifariam secat.

SIT cylindrus, uel cylindri portio a c: & plano per axem ducto secetur; cuius sectio sit parallelogrammum a b c d: & bifariam diuisis a d, b c parallelogrammi lateribus, per diuisionum puncta e f planum basi æquidistans ducatur; quod faciet sectionem, in cylindro quidem circulum æqualem iis, qui sunt in basibus, ut demonstrauit Serenus in libro cylindricorum, propositione quinta: in cylindri uero portione ellipsim æqualem, & similem eis, quæ sunt in oppositis planis, quod nos demonstrauimus in commentariis in librum Archimedis de conoidibus, & sphæroidibus. Dico centrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis esse in plano e f. Si enim fieri potest, sit centrum g: & ducatur g h ipsi a d æquidistans, usque ad e f planum. Itaque linea a e continenter diuisa bifariam, erit tandem pars aliqua ipsius k e, minor g h. Diuidantur ergo lineæ a e, e d in partes æquales ipsi k e: & per diuisiones plana basibus æquidistantia ducatur. erunt iam sectiones, figuræ æquales, & similes eis, quæ sunt in basibus: atque erit cylindrus in cylindros diuisus: & cylindri portio in portiones æquales, & similes ipsi k f. reliqua similiter, ut superius in prismate concludentur.



THEO-

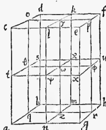


THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Cuiuslibet priſmatis, & cuiuslibet cylindri, uel cylindri portionis grauitatis centrum in medio ipſius axis conſiſtit.

Sit primum a f priſma æquidiſtantibus planis contentũ, quod ſolidum parallelepipedum appellatur: & oppoſitorum planorum c f, a h, d a, f g latera biſariam diuidantur in punctis k l m n o p q r s t u x: & per diuiſiones ducantur plana k n, o r, s x. communes autem eorum planorum ſectiones ſint lineæ y z, ϑ φ, χ ψ: quæ in puncto ω conueniãt. erit ex decima eiuſdem libri Archimedis parallelogrammi c f centrum grauitatis punctum y; parallelogrammi a h

centrum z: parallelogrammi α d, θ: parallelogrammi fg, ϕ: parallelogrammi d h, χ: & parallelogrammi c g centrũ ψ: atque erit ω punctum medium uniuscuiusque axis, uidelicet eius lineæ, quæ oppositorum planorũ centra coniungit. Dico ω centrum esse grauitatis ipsius solidi. est
6 huius enim, ut demonstrauimus, solidi a f centrum grauitatis in plano K n; quod oppositis planis a d, g f æquidistans reliquorum planorum latera bifariam diuidit: & simili

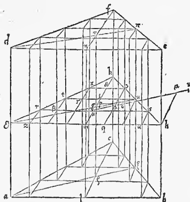


ratione idem centrum est in plano o r, æquidistante planis a c, b f oppositis. ergo in communi ipsorum sectione: uidelicet in linea y z. Sed est etiam in plano t u, quod quidẽ y z secat in ω. Constat igitur centrum grauitatis solidi esse punctum ω, medium scilicet axium, hoc est linearum, quæ planorum oppositorum centra coniungunt.

Sit aliud prisma a f; & in eo plana, quæ opponuntur, triangula a b c, d e f. diuisisq; bifariam parallelogrammorum lateribus a d, b e, c f in punctis g h κ, per diuisiones planũ ducatur, quod oppositis planis æquidistans faciet sectionẽ triangulum g h κ æquale, & simile ipsis a b c, d e f. Rursus diuidatur a b bifariam in l: & iuncta c l per ipsam, & per c κ f planum ducatur prisma secans, cuius, & parallelogrã mi a e communis sectio sit l m n. diuidet punctum m lineam g h bifariam; & ita n diuidet lineam d e: quoniam
5. huius triangula a c l, g κ m, d f n æqualia sunt, & similia, ut supra demonstrauimus. Iam ex iis, quæ tradita sunt, constat centrum grauitatis prismatis in plano g h κ contineri. Dico ipsum esse in linea κ m. Si enim fieri potest, sit o centrum;

& per

& per o ducatur o p ad k m ipsi h g æquidistans. Itaque linea h m bifariã usque eò diuidatur, quoad reliqua sit pars quædam q m, minor o p. deinde h m, m g diuidantur in partes æquales ipsi m q: & per diuisiones lineæ ipsi m K æquidistantes ducantur. puncta uero, in quibus hæ triangulorum latera secant, coniungantur ductis lineis r s, t u,



x y; quæ basi g h æquidistabunt. Quoniam enim lineæ g z, h α sunt æquales: itemq; æquales g m, m h: ut m g ad g z, ita erit m h, ad h α: & diuidendo, ut m z ad z g, ita m α ad α h. Sed ut m z ad z g, ita k r ad r g: & ut m α ad α h, ita k s 2. sexti.
ad s h. quare ut k r ad r g, ita κ s ad s h. æquidistant igitur 11. quinti
inter se se r s, g h. eadem quoque ratione demonstrabimus 2. sexti.

tu,xy ipsi g h æquidistare. Et quoniam triangula, quæ fiunt à lineis Ky,yu,us, sh æqualia sunt inter se, & similia
19. sexti triangulo Kmh: habebit triangulum Kmh ad triangulũ Kδy duplam proportionem eius, quæ est lineæ κh ad Ky. sed Kh posita est quadrupla ipsius ky. ergo triangulum kmh ad triangulum K y eãdem proportionem habebit, quam sexdecim ad unũ: & ad quatuor triangula kδy, yu, us, sαh habebit eandem, quam sexdecim ad quatuor, hoc est quam hK ad ky & similiter eandem habere demonstrabitur triangulum kmg ad quatuor triãgula Kδx, xγt, tβr,
2: uel 12 quinti. rzg. quare totum triangulum Kgh ad omnia triangula gzr, rβt, tγx, xδK, Kδy, yu, us, sαh ita erit, ut hk ad ky, hoc est ut hm ad mq. Si igitur in triangulis abc, def describantur figuræ similes ei, quæ descripta est in ghK triangulo: & per lineas sibi respondentes plana ducantur: totum prisma af diuisum erit in tria solida parallelepipeda yγ, uβ, sz, quorum bases sunt æquales & similes ipsis parallelogrammis yγ, uβ, sz: & in octo prismata gzr, rβt, tγx, xδK, kδy, yu, us, sαh: quorum item bases æquales, & similes sunt dictis triangulis; altitudo autem in omnibus, totius prismatis altitudini æqualis.

Itaque solidi parallelepipedi y γ centrum grauitatis est in linea δ ι: solidi u β centrum est in linea ε η: & solidi s z in linea η m, quæ quidem lineæ axes sunt, cum planorum oppositorum centra coniungant. ergo magnitudinis ex his solidis compositæ centrum grauitatis est in linea δ m, quod sit θ; & iuncta θ o producatur: à puncto autem h ducatur h μ ipsi m κ æquidistans, quæ cum θ o in μ conueniat. triangulum igitur g h κ ad omnia triangula g z r, r β t, t γ x, x δ k, k δ y, y u, u s, s α h eandem habet proportionem, quam h m ad m q; hoc est, quam μ θ ad θ λ: nam si h m, μ θ produci intelligantur, quousque coeant; erit ob linearum q y, m κ æquidistantiam, ut h q ad q m, ita μ λ ad ad λ θ: & componendo, ut h m ad m q, ita μ θ ad θ λ. linea uero θ o maior est, quàm θ λ: habebit igitur μ θ ad θ λ maiorem proportionem, quàm ad θ o. quare triangulum etiam g h κ ad omnia iam dicta triangula maiorem proportionē habebit, quàm μ θ ad θ o. sed ut triangulū g h κ ad omnia triangula, ita totū prisma a f ad omnia prismata g z r, r β t, t γ x, x δ κ, κ δ y, y u, u s, s α h: quoniam enim solida parallelepipeda æque alta, eandem inter se proportionem habent, quam bases; ut ex trigesimasecunda undecimi elementorum constat. sunt autem solida parallelepipeda prismatum triangulares bases habentium dupla sequitur, ut etiam huiusmodi prismata inter se sint, sicut eorum bases. ergo totum prisma ad omnia prismata maiorem proportionem habet, quam μ θ ad θ o: & diuidendo solida parallelepipeda y γ, u β, s z ad omnia prismata proportionem habent maiorem, quàm μ o ad o θ. fiat ν o ad o θ, ut solida parallelepipeda y γ, u β, s z ad omnia prismata. Itaque cum à prismate a f, cuius cētrum grauitatis est o, auferatur magnitudo ex solidis parallelepipedis y γ, u β, s z constans: atque ipsius grauitatis centrum sit θ: reliquæ magnitudinis, quæ ex omnibus prismatibus constat, grauitatis centrum erit in linea θ o producta: & in puncto ν, ex octaua propositione eiusdem libri Archi-

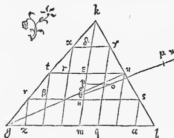
8. quinti.

28. undecimi

15. quinti

19. quinti apud Campanum.

medis. ergo punctum ν extra prisma a f positum, centrũ erit magnitudinis cõpositæ ex omnibus prismatibus g z r, r β t, t γ x, x δ k, k δ y, y u, u s, s α h, quod fieri nullo modo potest. est enim ex diffinitione centrum grauitatis solidæ figuræ intra ipsam positum, non extra. quare relinquitur, ut cẽtrum grauitatis prismatis sit in linea K m. Rursus b c bifariam in ξ diuidatur: & ducta a ξ, per ipsam, & per lineam a g d planum ducatur; quod prisma secet: faciatq; in parallelogrammo b f sectionem ξ π diuidet punctum π lineam quoque c f bifariam: & erit plani eius, & trianguli g h K communis sectio g u; quòd pũctum u in medio lineæ h K

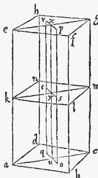


positum sit. Similiter demonstrabimus centrum grauitatis prismatis in ipsa g u inesse. sit autem planorum e f n l, a d π ξ communis sectio linea ρ σ τ; quæ quidem prismatis axis erit, enim transeat per centra grauitatis triangulorum a b e, g h κ, d e f, ex quartadecima eiusdem. ergo centrum grauitatis prismatis a f est punctum σ, centrum scilicet

trianguli

trianguli g h K, & ipsius ρ τ axis medium.

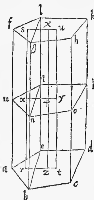
Sit prisma a g, cuius opposita plana sint quadrilatera a b c d, e f g h: secenturq; a e, b f, c g, d h bifariam: & per divisiones planum ducatur; quod sectionem faciat quadrilaterum K l m n. Deinde iuncta a c per lineas a c, a e ducatur planum secãs prisma, quod ipsum diuidet in duo prismata triangulares bases habentia a b c e f g, a d c e h g. Sint autẽ triangulorum a b c, e f g grauitatis centra o p: & triangulorum a d c, e h g centra q r: iunganturq; o p, q r; quæ plano k l m n occurrant in punctis s t. erit ex iis, quæ demonstrauimus, punctum s grauitatis centrum trianguli κ l m; & ipsius prismatis a b c e f g: punctum uero t centrum grauitatis trianguli K n m, & prismatis a d c, e h g. iunctis igitur o q, p r, s t, erit in linea o q cẽtrum grauitatis quadrilateri a b c d, quod sit u: & in linea p r cẽtrum quadrilateri e f g h sit autem x. denique iungatur u x, quæ secet lineam s t in y. secabit enim cum sint in eodem plano: atq; erit y grauitatis centtum quadrilateri K l m n. Dico idem punctum y centrum quoque grauitatis esse totius prismatis. Quoniam enim quadrilateri k l m n grauitatis centrum est y: lineas y ad y t eandem proportionem habebit, quam triangulum κ n m ad triangulum k l m, ex 8 Archimedis de centro grauitatis planorum. Vt autem triã gulum κ n m ad ipsum κ l m, hoc est ut triangulum a d c ad triangulum a b c, æqualia enim sunt, ita prisma a d c e h g.



5. huius.

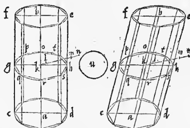
ad prismã a b c e f g. quare lineas y ad y t eandem proportionem habet, quam prisma a d c e h g ad prisma a b c e f g. Sed prismatis a b c e f g centrum grauitatis est s: & prismatis a d c e h g centrum t. magnitudinis igitur ex his composita, hoc est totius prismatis a g centrum grauitatis est punctum y; medium scilicet axis u x, qui oppositorum planorum centra coniungit.

Rursus sit prisma basim habens pentagonum a b c d e: & quod ei opponitur sit f g h k l: secenturq; a f, b g, c h, d k, e l bifariam: & per diuisiones ducto plano, sectio sit pẽtagonũ m n o p q. deinde iuncta e b per lineas l e, e b aliud planum ducatur, diuidẽs prisma a k in duo prismata; in prisma scilicet a l, cuius plana opposita sint triangula a b e f g l: & in prisma b k, cuius plana opposita sint quadrilatera b c d e g h k l. Sint autem triangulorum a b e, f g l centra grauitatis puncta r s: & b c d e, g h k l quadrilaterorum centra t u: iunganturq; r s, t u occurrentes plano m n o p q in punctis x y. & itidem iungatur r t, s u, x y. erit in linea r t cẽtrum grauitatis pentagoni a b c d e; quod sit z: & in linea s u centrum pentagoni f g h k l: sit autem χ: & ducatur z χ, quæ dicto plano in ψ occurrat. Itaq; punctum x est centrum grauitatis trianguli m n q, ac prismatis a l: & y grauitatis centrum quadrilateri n o p q, ac prismatis b k. quare y centrum erit pentagoni m n o p q. & similiter



ſimiliter demonſtrabitur totius priſmatis a K grauitatis eſſe centrum. Simili ratione & in aliis priſmatibus illud idem facile demonſtrabitur. Quo autem pacto in omni figura rectilinea centrum grauitatis inueniatur, docuimus in commentariis in ſextam propoſitionem Archimedis de quadratura parabolæ.

Sit cylindrus, uel cylindri portio c e cuius axis a b: ſeceturq; plano per axem ducto; quod ſectionem faciat parallelogrammum c d e f: & diuiſis c f, d e bifariam in punctis



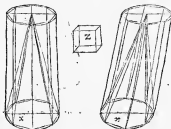
g h, per ea ducatur planum baſi æquidiſtans. erit ſectio g h circulus, uel ellipſis, centrum habens in axe; quod ſit K: atque erunt ex iis, quæ demonſtrauimus, centra grauitatis planorum oppoſitorum puncta a b: & plani g h ipſum k, in quo quidem plano eſt centrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis. Dico punctum K cylindri quoque, uel cylindri portionis grauitatis centrum eſſe. Si enim fieri poteſt, ſit l centrum: ducaturq; k l, & extra figuram in m producatur. quam uero proportionem habet linea m K ad K l 4. huius.

habeat circulus, uel ellipsis g h ad aliud spacium, in quo u: & in circulo, uel ellipsi plane describatur rectilinea figura, ita ut tãdem relinquãtur portiones minores spacio u, quæ sit o p g q r s h t: descriptaq; simili figura in oppositis planis c d, f e, per lineas sibi ipsis respondentes plana ducãtur. Itaque cylindrus, uel cylindri portio diuiditur in prisma, cuius quidem basis est figura rectilinea iam dicta, centrum que grauitatis punctum K: & in multa solida, quæ pro basi bus habent relictas portiones, quas nos solidas portiones appellabimus. cum igitur portiones sint minores spacio u, circulus, uel ellipsis g h ad portiones maiorem proportionem habebit, quàm linea m k ad K l. fiat n K ad K l, ut circulus uel ellipsis g h ad ipsas portiones. Sed ut circulus uel ellipsis g h ad figuram rectilineam in ipsa descriptam, ita est cylindrus uel cylindri portio c e ad prisma, quod rectilineam figuram pro basi habet, & altitudinem æqualem; id, quod infra demonstrabitur. ergo per conuersionem rationis, ut circulus, uel ellipsis g h ad portiones relictas, ita cylindrus, uel cylindri portio c e ad solidas portiones, quare cylindrus uel cylindri portio ad solidas portiones eandem proportionem habet, quam linea n K ad K l & diuidendo prisma, cuius basis est rectilinea figura, ad solidas portiones candem proportionem habet, quam n l ad l K. & quoniam a cylindro uel cylindri portione, cuius grauitatis centrum est l, aufertur prisma basim habens rectilineam figurã, cuius centrũ grauitatis est K: residuæ magnitudinis ex solidis portionibus cõposita grauitatis cẽtrũ erit in linea k l protracta, & in puncto n; quod est absurdũ. relinquitur ergo, ut cẽtrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis sit punctũ k. quæ omnia demonstrãda proposuimus.

At uero cylindrum, uel cylindri portionẽ c e ad prisma, cuius basis est rectilinea figura in spacio g h descripta, & altitudo æqualis; eandem habere

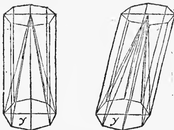
bere proportionem, quam ſpacium g h ad dictã figuram, hoc modo demonſtrabimus.

Intelligatur circulus, uel ellipſis x æqualis figuræ rectilineæ in g h ſpacio deſcriptæ: & ab x conſtituatur conus, uel



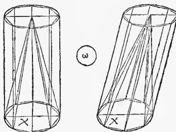
coni portio, altitudinẽ habens eandẽ, quã cylindrus uel cylindri portio c e. Sit deinde rectilinea figura, in qua y eadẽ, quæ in ſpacio g h deſcripta eſt: & ab hac pyramis æquealta conſtituatur. Dico conũ uel coni portionẽ x pyramidi y æqualẽ eſſe. niſi enim ſit æqualis, uel maior, uel minor erit.

Sit primum maior, et exuperet ſolido z. Itaque in circulo, uel ellipſi x deſcribatur figura rectilinea; & in ea pyramis eandem, quam conus, uel coni portio altitudinem habens, ita ut portiones relictæ minores ſint ſolido z, quemadmodum docetur in duodecimo libro elementorum propoſitione undecima. erit pyramis x adhuc pyramide y maior. & quoniam piramides æque altæ inter ſe ſunt, ſicuti baſes; pyramis x ad piramidem y eandem proportionem habet, quàm figura rectilinea x ad figuram y. Sed figura recti 6. duodecimi.



linea x cum ſit minor circulo, uel ellipſi, eſt etiam minor figura rectilinea y. ergo pyramis x pyramide y minor erit. Sed & maior; quod fieri nõ poteſt. At ſi conus, uel coni portio x ponatur minor pyramide y: ſit alter conus æque altus, uel altera coni portio χ ipſi pyramidi y æqualis. erit eius baſis circulus, uel ellipſis maior circulo, uel ellipſi x, quorum exceſſus ſit ſpacium ω. Si igitur in circulo, uel ellipſi χ figura rectilinea deſcribatur, ita ut portiones relictæ ſint ω ſpacio minores, eiuſmodi figura adhuc maior erit circulo, uel ellipſi x, hoc eſt figura rectilinea y. & pyramis in ea conſtituta minor cono, uel coni portione χ, hoc eſt minor pyramide y. eſt ergo ut χ figura rectilinea ad figuram rectilineam y, ita pyramis χ ad pyramidem y. quare cum figura rectilinea χ ſit maior figura y: erit & pyramis χ pyramide y maior. ſed erat minor; quod rurſus fieri non poteſt. non eſt igitur conus, uel coni portio x neque maior, neque minor pyramide y. ergo ipſi neceſſario eſt æqualis. Itaque quoniam ut conus ad conum, uel coni portio ad co

ni

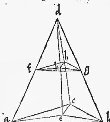


ni portionem, ita est cylindrus ad cylindrum, uel cylindri portio ad cylindri portionem: & ut pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma, cum eadem sit basis, & æqualis altitudo; erit cylindrus uel cylindri portio x prismati y æqualis, estq; ut spacium g h ad spacium x, ita cylindrus, uel cylindri portio c e ad cylindrum, uel cylindri portionem x. Constat igitur cylindrum uel cylindri portionẽ c e, ad prisma y, quippe cuius basis est figura rectilinea in spacio g h descripta, eandem proportionem habere, quam spacium g h habet ad spacium x, hoc est ad dictam figuram, quod demonstrandum fuerat. 7. quinti

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

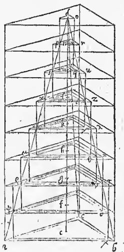
Si pyramis secetur plano basi æquidistante; sectio erit figura similis ei, quæ est basis, centrum grauitatis in axe habens.

SIT pyramis, cuius basis triangulum a b c; axis d e: & secetur plano basi æquidistante; quod sectionē faciat f g h; occurratq; axi in puncto K. Dico f g h triangulum esse, ipsi a b c simile; cuius grauitatis centrum est K. Quoniā enim
16. undecimi duo plana æquidistantia a b c, f g h secantur à plano a b d; communes eorum sectiones a b, f g æquidistantes erunt: & eadem ratione æquidistantes ipsæ b c, g h: & c a, h f. Quòd
10. undecimi cum duæ lineæ f g, g h, duabus a b, b c æquidistent, nec sint in eodem plano; angulus ad g æqualis est angulo ad b: & similiter angulus ad h angulo ad c: angulusq; ad f ei, qui ad a est æqualis. triangulum igitur f g h simile est triangulo a b c. At uero punctum K centrum esse grauitatis trianguli f g h hoc modo ostendemus. Ducantur plana per axem, & per lineas d a, d b, d c: erunt communes se-
16. undecimi ctiones f K, a e æquidistantes: pariterq; K g, e b; & K h, e c:
10. undecimi quare angulus K f h angulo e a c; & angulus K f g ipsi e a b est æqualis. Eadem ratione anguli ad g angulis ad b: & anguli ad h iis, qui ad c æquales erunt. ergo puncta e K in triangulis a b c, f g h similiter sunt posita, per sextam positionem Archimedis in libro de centro grauitatis planorum. Sed cum e sit centrum grauitatis trianguli a b c, erit ex undecima propositione eiusdem libri, & K trianguli f g h grauitatis centrum. id quod demonstrare oportebat. Non aliter in ceteris pyramidibus, quod propositum est demonstrabitur.



PROBLEMA I. PROPOSITIO X.

DATA qualibet pyramide, fieri poteſt, ut figura ſolida in ipſa inſcribatur, & altera circũſcribatur ex priſmatibus æqualem altitudinem habẽtibus, ita ut circumſcripta inſcriptam excedat magnitudine, quæ minor ſit quacũque ſolida magnitudine propoſita.



Sit pyramis, cuius baſis triangulũ a b c; axis d e. Sitq; priſma, quod eandẽ baſim habeat, & axem eundem. Itaque hoc priſmate continenter ſecto biſariam, plano baſi æquidiſtã te, relinquetur tãdem priſ ma quoddam minus propoſita magnitudine: quod quidem baſim eandem habeat, quam pyramis, & axem e f. diuidatur d e in partes æquales ipſi e f in punctis g h k l m n: & per diuiſiones plana ducãtur: quæ baſibus æquidiſtent, erunt ſectiones, triangula ipſi a b c ſimilia, ut proxime oſtendimus. ab uno quoque autẽ horum triangulorum duo priſmata cõ ſtruantur; unum quidem ad partes e; alterum ad

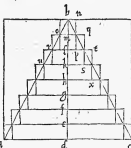
partes d. in pyramide igitur inſcripta erit quædam figura, ex priſmatibus æqualem altitudinem habentibus cõſtans, ad partes e: & altera circumſcripta ad partes d. Sed unumquodque eorum priſmatum, quæ in figura inſcripta continentur, æquale eſt priſmati, quod ab eodem fit triangulo in figura circumſcripta: nam priſma p q priſmati p o eſt æquale; priſma s t æquale priſmati s r; priſma x y priſmati x u; priſma $\eta\,\theta$ priſmati η z; priſma $\mu\,\nu$ priſmati $\mu\,\lambda$; priſma $\rho\,\sigma$ priſmati $\rho\,\pi$; & priſma $\phi\,\chi$ priſmati $\phi\,\tau$ æquale. relinquitur ergo, ut circumſcripta figura exuperet inſcriptã priſmate, quod baſim habet a b c triangulum, & axem e f. Illud uero minus eſt ſolida magnitudine propoſita. Eadẽ ratione inſcribetur, & circumſcribetur ſolida figura in pyramide, quæ quadrilateram, uel plurilaterã baſim habeat.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XI.

DATO cono, fieri poteſt, ut figura ſolida inſcribatur, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem habentibus altitudinem, ita ut circumſcripta ſuperet inſcriptam, magnitudine, quæ ſolida magnitudine propoſita ſit minor.

SIT conus, cuius axis b d: & ſecetur plano per axem ducto, ut ſectio ſit triangulum a b c: intelligaturq; cylindrus, qui baſim eandem, & eundem axem habeat. Hoc igitur cylindro continenter bifariam ſecto, relinquetur cylindrus minor ſolida magnitudine propoſita. Sit autem is cylindrus, qui baſim habet circulum circa diametrum a c, & axem d e. Itaque diuidatur b d in partes æquales ipſi d e in punctis f g h K l m: & per ea ducantur plana conum ſecantia; quæ baſi æquidiſtent. erunt ſectiones circuli, centra in axi habentes, ut in primo libro conicorum, propoſitione

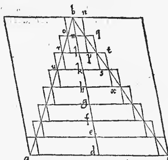
tione quarta Apollonius demonstrauit. Si igitur à singulis horum circulorum, duo cylindri fiant; unus quidem ad basis partes; alter ad partes uerticis: inscripta erit in cono solida quædam figura, & altera circumscripta ex cylindris æqualem altitudinem habentibus constans; quorum unusquisque, qui in figura inscripta continetur æqualis est ei, qui ab eodem fit circulo in figura circũscripta. Itaque cylindrus o p æqualis est cylindro o n; cylindrus r s cylindro r q; cylindrus u x cylindro u t est æqualis; & alii aliis similiter. quare constat circũscriptam figuram superare inscriptam cylindro, cuius basis est circulus circa diametrum a c, & axis d e. atque hic est minor solida magnitudine proposita.



PROBLEMA III. PROPOSITIO XII.

DATA coni portione, potest solida quædam figura inscribi, & altera circumscribi ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus; ita ut circumscripta inscriptam exuperet, magnitudine, quæ minor sit solida magnitudine proposita.

Figuram eiuſmodi, & inſcribemus, & circũſcribemus, ita ut in cono dictum eſt.

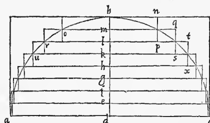


PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XIII.

DATA ſphæræ portione, quæ dimidia ſphæra maior non ſit, poteſt ſolida quædam portio inſcribi & altera circumſcribi ex cylindris æqualem altitudinem habentibus, ita ut circumſcripta inſcriptam excedat magnitudine, quæ ſolida magnitudine propoſita ſit minor.

HOC etiam eodem prorſus modo fiet: atque ut ab Archimede traditum eſt in conoidum, & ſphæroidum portionibus, propoſitione uigeſimaprima libri de conoidibus, & ſphæroidibus.

THEO

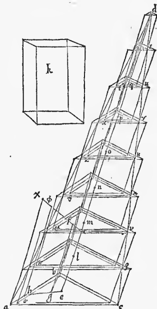


THEOREMA X. PROPOSITIO XIIII.

Cuiuslibet pyramidis, & cuiuslibet coni, uel coni portionis, centrum grauitatis in axe cõſiſtit.

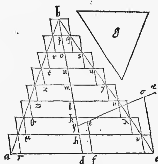
SIT pyramis, cuius baſis triangulum a b c: & axis d e. Dico in linea d e ipſius grauitatis centrum ineſſe. Si enim fieri poteſt, ſit centrum f: & ab f ducatur ad baſim pyramidis linea f g, axi æquidiſtans: iunctaq; e g ad latera trianguli a b c producatur in h. quam uero proportionem habet linea h e ad e g, habeat pyramis ad aliud ſolidum, in quo K: inſcribaturq; in pyramide ſolida figura, & altera circumſcribatur ex priſmatibus æqualem habentibus altitudinem, ita ut circumſcripta inſcriptam exuperet magnitudine, quæ ſolido k ſit minor. Et quoniam in pyramide planum baſi æquidiſtans ductum ſectionem facit figuram ſimilem ei, quæ eſt baſis; centrumq; grauitatis in axe habentem: erit priſmatis s t grauitatis centrũ in linea r q; priſmatis u x centrum in linea q p, priſmatis y z in linea p o; priſmatis ηθ in linea o n; priſmatis λμ in linea n m; priſmatis νπ in m l; & denique priſmatis ρσ in l e. quare to-

tius figuræ inſcriptæ centrum grauitatis eſt in linea r e: quod ſit τ: iũ-ctaque τ f, & producta, à puncto h ducatur linea axi pyramidis æquidiſtans, quæ cũ linea τ f conueniat in φ. habebit φ τ ad τ f eandem proportionem, quã h e ad e g. Quoniam igitur exceſſus, quo circũſcripta figura inſcriptam ſuperat, minor eſt ſolido κ; pyramis ad eundẽ exceſsũ maiorẽ proportionẽ habet, quàm ad κ ſolidum: uidelicet maiorem, quàm linea h e ad e g; hoc eſt quam φ τ ad τ f: & propterea multo maiorem habet ad partem exceſſus, quæ intra pyramidem comprehenditur. Itaque e habeat



beat eam, quam $\chi\tau$ ad τf. erit diuidendo ut χf ad $f\tau$, ita figura solida inscripta ad partem excessus, quæ est intra pyramidem. Cum ergo à pyramide, cuius grauitatis cẽtrum est punctum f, solida figura inscripta auferatur, cuius centrũ τ: reliquæ magnitudinis constantis ex parte excessus, quæ est intra pyramidem, centrum grauitatis erit in linea τf producta, & in puncto χ. quod fieri non potest. Sequitur igitur, ut centrum grauitatis pyramidis in linea d e; hoc est in eius axe consistat.

Sit conus, uel coni portio, cuius axis b d: & secetur plano per axem, ut sectio sit triangulum a b c. Dico centrum grauitatis ipsius esse in linea b d. Sit enim, si fieri potest, centrũ



e: perq; e ducatur e f axi æquidistans: & quam proportionem habet c d ad d f, habeat conus, uel coni portio ad solidum g. inscribatur ergo in cono, uel coni portione soli.

da figura, & altera circumſcribatur ex cylindris, uel cylindri portionibus, ſicuti dictum eſt, ita ut exceſſus, quo figura circumſcripta inſcriptam ſuperat, ſit ſolido g minor. Itaque centrum grauitatis cylindri, uel cylindri portionis q r eſt in linea p o; cylindri, uel cylindri portionis s t centrum in linea o n; centrum u x in linea n m; y z in m b; $\eta\theta$ in l k; $\lambda\,\mu$ in K h; & denique $\nu\,\pi$ centrum in h d. ergo figuræ inſcriptæ centrum eſt in linea p d. Sit autem ρ: & iuncta ρ e protendatur, ut cum linea, quæ à pũcto c ducta fuerit axi æquidiſtans, conueniat in σ. erit $\sigma\rho$ ad ρ e, ut c d ad d f: & conus, ſeu coni portio ad exceſſum, quo circumſcripta figura inſcriptam ſuperat, habebit maiorem proportionem, quàm $\sigma\rho$ ad ρ e. ergò ad partem exceſſus, quæ intra ipſius ſuperficiem comprehenditur, multo maiorem proportionem habebit. habeat eam, quam $\tau\rho$ ad ρ e. erit diuidendo

diuidendo figura ſolida inſcripta ad dictam exceſſus partem, ut τe ad $e \rho$. & quoniam à cono, ſeu coni portione, cuius grauitatis centrum eſt e, aufertur figura inſcripta, cuius centrum ρ: reſiduæ magnitudinis compoſitæ ex parte exceſſus, quæ intra coni, uel coni portionis ſuperficiem continetur, centrum grauitatis erit in linea ρe protracta, atque in puncto τ. quod eſt abſurdum. cõſtat ergo centrũ grauitatis coni, uel coni portionis, eſſe in axe b d: quod demonſtrandum propoſuimus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XV.

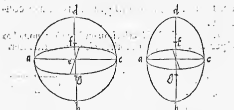
Cuiuslibet portionis ſphæræ uel ſphæroidis, quæ dimidia maior non ſit: itemq; cuiuslibet portionis conoidis, uel abſciſſæ plano ad axem recto, uel non recto, centrum grauitatis in axe conſiſtit.

Demonſtratio ſimilis erit ei, quam ſupra in cono, uel coni portione attulimus, ne toties eadem fruſtra iterentur.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XVI.

In sphæra, & sphæroide idem est grauitatis, & figuræ centrum.

Secetur sphæra, uel sphæroides plano per axem ducto; quod sectionem faciat circulum, uel ellipsim a b c d, cuius diameter, & sphæræ, uel sphæroidis axis d b; & centrum e. Dico e grauitatis etiam centrum esse. secetur enim altero plano per e, ad planum secans recto, cuius sectio sit circulus circa diametrum a c, erunt a d c, a b c dimidiæ portiones sphæræ, uel sphæroidis. & quoniam portionis a d c grauitatis centrum est in linea d, & centrum portionis a b c in ipsa b e; totius sphæræ, uel sphæroidis grauitatis centrum in axe d b consistet. Quòd si portionis a d c centrum grauitatis ponatur esse f. & fiat ipsi f e æqualis e g: punctū g portionis a b c centrum erit. solidis enim figuris similibus & æqualibus inter se aptatis, & centra grauitatis ipsarum inter se aptentur necesse est. ex quo fit, ut magnitudinis, quæ ex utrisque cōstat, hoc est ipsius sphæræ, uel sphæroidis grauitatis centrum sit in medio lineæ f g, uidelicet in e. Sphæra igitur, uel sphæroidis grauitatis centrum est idem, quod centrum figuræ.

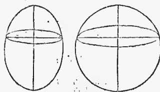


per 2. petitionem 4 Archimedis.

Ex

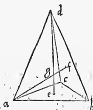
Ex demonstratis perspicue apparet, portioni sphæræ uel sphæroidis, quæ dimidia maior est, cẽtrum grauitatis in axe consistere.

Data enim qualibet maiori portiõe, quoniã totius sphæræ, uel sphæroidis grauitatis centrum est in axe; est autem & in axe centrum portionis minoris: reliquæ portionis uidelicet maioris centrum in axe necessario consistet.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO XVII.

Cuiuslibet pyramidis triãgularem basim habẽtis grauitatis centrum est in puncto, in quo ipsius axes conueniunt.

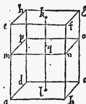


Sit pyramis, cuius basis triangulum a b c, axis d e: sitq; trianguli b d c grauitatis centrum f: & iungatur a f. erit & a f axis eiusdem pyramidis ex tertia diffinitione huius. Itaque quoniam centrum grauitatis est in axe d e; est autem & in axe a f, quod proxime demonstraui

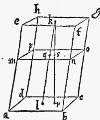
mus: erit utique grauitatis centrum pyramidis punctum g: in quo scilicet ipsi axes conueniunt.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVIII.

SI solidum parallelepipedum secetur plano basibus æquidistante; erit solidum ad solidum, sicut altitudo ad altitudinem, uel sicut axis ad axem.



Sit solidum parallelepipedum a b c d e f g h, cuius axis K l: seceturq; plano basibus æquidistante, quod faciat sectionem m n o p; & axi in puncto q occurrat. Dico solidum g m ad solidum m c eam proportionem habere, quam altitudo solidi g m habet ad solidi m c altitudinem; uel quam axis K q ad axem q l. Si enim axis K l ad basis planum sit perpendicularis, & linea g c, quæ ex quinta huius ipsi k l æquidistat, perpendicularis erit ad idē planum, & solidi altitudinem dimetietur. Itaque solidum g m ad solidum m c eam proportionem habet, quam parallelogrammū g n ad parallelogrammum n c, hoc est quam linea g o, quæ



2. undecimi.

1. sexti.

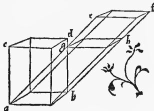
est

eſt ſolidi g m altitudo ad o e altitudinem ſolidi m c, uel quã axis k q ad q l axem. Si uero axis k l non ſit perpendicularis ad planum baſis; ducatur a puncto k ad idem planum perpendicularis k r, occurrẽs plano m n o p in s. ſimiliter demõſtrabimus ſolidum g m ad ſolidũ m c ita eſſe, ut axis k q ad axem q l. Sed ut K q ad q l, ita k s altitudo ad altitudinem s r; nam lineæ K l, K r à planis æquidiſtantibus in eaſdem proportiones ſecantur. ergo ſolidum g m ad ſolidum m c eandẽ proportionem habet, quam altitudo ad altitudinẽ, uel quam axis ad axem. quod demõſtrare oportebat. 17. undecimi

THEOREMA XV. PROPOSITIO XIX.

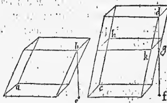
Solida parallelepipeda in eadem baſi, uel in æqualibus baſibus conſtituta eam inter ſe proportionem habent, quam altitudines: & ſi axes ipſorum cum baſibus æquales angulos contineant, eam quoque, quam axes proportionem habebũt.

Sint ſolida parallelepipeda in eadẽ baſi cõſtituta a b c d, a b e f: & ſit ſolidi a b c d altitudo minor: producatur autem planum c d adeo, ut ſolidum a b e f ſecet; cuius ſectio ſit g h. erũt ſolida a b c d, a b g h in eadem baſi, & æquali altitudine inter ſe æqualia. Quoniã igitur ſolidum a b e f ſecatur plano baſibus æquidiſtãte, erit ſolidum g h e f ad ipſum a b g h 29. undecimi 18. huius

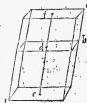


ut altitudo ad altitudinem: & componendo conuertendo
7. quinti. que solidum a b g h, hoc est solidum a b c d ipsi æquale, ad solidum a b e f, ut altitudo solidi a b c d ad solidi a b e f altitudinem.

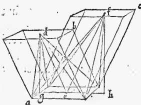
Sint solida parallelepipeda a b, c d in æqualibus basibus constituta. sitq; b e altitudo solidi a b: & solidi c d altitudo d f; quæ quidem maior sit, quàm b e. Dico solidum a b ad solidum c d eandem habere proportionem, quam b e ad d f. abscindatur enim à linea d f æqualis ipsi b e, quæ sit g f: & per g ducatur planum secans solidum c d; quod basibus
31. undecimi æquidistet, faciatq; sectioné h K. erunt solida a b, c K æque alta inter se æqualia, cũ æquales bases habeant.
18. huius Sed solidũ h d ad solidum c K est, ut altitudo d g ad g f altitudiné; secatur. enim solidum c d plano basibus æquidistante: & rursus cõponendo, conuertendoq; solidũ c K
7. quinti. ad solidum c d, ut g f ad f d. ergo solidum a b, quod est æquale ipsi c K ad solidum c d eam proportionem habet, quam altitudo g f, hoc est b e ad d f altitudinem.

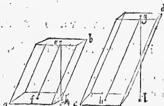


Sint deinde solida parallelepipeda a b, a c in eadem basi; quorum axes d e, f e cum ipsa æquales angu



los contineant. Dico solidum a b ad solidum a c eãdem habere proportionem, quam axis d e ad axem c f. Si enim axes in eadem recta linea fuerint constituti, hæc duo solida, in unum, atque idem solidum conuenient. quare ex iis, quæ proxime tradita sunt, habebit solidum a b ad solidum a c eandem proportionem, quam axis d e ad e f axem. Si uero axes non sint in eadem recta linea, demittantur a punctis d, f perpendiculares ad basis planum, d g, f h: & iungantur e g, e h. Quoniam igitur axes cum basibus æquales angulos continent, erit d e g angulus æqualis angulo f e h: & sunt anguli ad g h recti, quare, & reliquus e d g æqualis erit reliquo e f h: & triangulum d e g triãgulo f e h simile: ergo g d ad d e est, ut h f ad f e: & permutando g d ad h f, ut d e ad e f. Sed solidum a b ad solidum a c eandem proportionem habet, quam d g altitudo ad altitudinẽ f h. ergo & eãdẽ habebit, quã axis d e ad e f axẽ.





Postremo sint solida parallelepipeda a b, c d in

æqualibus basibus, quorum axes cum basibus æquales an gulos faciant. Dico solidum a b ad solidū c d ita esse, ut axis e f ad axem g h: nam si axes ad planum basis recti sint, illud perspicue constat: quoniam eadem linea, & axem & soli di altitudinem determinabit. Si uero sint inclinati, à pun- ctis e g ad subiectum planum perpendiculares ducantur e k, g l: & iungantur f k, h l. rursus quoniam axes cum ba sibus æquales faciunt angulos, eodem modo demonstrabi tur, triangulum e f K triangulo g h l simile esse: & e k ad g l, ut e f ad g h. Solidum autem a b ad solidum c d est, ut e K ad g l. ergo & ut axis e f ad axem g h. quæ omnia de monstrare oportebat.

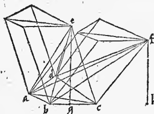
Ex iis quæ demonstrata sunt, facile constare potest, prismata omnia & pyramides, quæ trian- gulares bases habent, siue in eisdem, siue in æqua
15.quinti libus basibus constituantur, eandem proportio- nem habere, quam altitudines: & si axes cum ba sibus æquales angulos contineant, similiter ean- dem, quam axes, habere proportionem: sunt
28.unde- cimi. enim solida parallelepipeda prismatum triangula
7.duode- cimi. res bases habentiū dupla; & pyramidum sextupla.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XX.

Prismata omnia & pyramides, quæ in eisdem, uel æqualibus basibus constituuntur, eam inter se proportionem habent, quam altitudines: & si axes cum basibus faciant angulos æquales, eam etiam, quam axes habent proportionem.

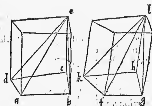
Sint

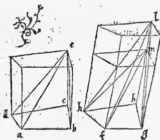
Sint duo prismata a e, a f, quorum eadem basis quadrilatera a b c d: sitq; prismatis a e altitudo e g; & prismatis a f altitudo f h. Dico prisma a e ad prisma a f eam habere proportionem, quam e g ad f h. iungatur enim a c: & in unoquoque prismate duo prismata intelligantur, quorum bases sint triangula a b c, a c d. habebunt duo prismata in eadem basi a b c constituta, proportionem eandem, quam ipsorum altitudines e g, f h, ex iam demonstratis. & similiter alia duo, quæ sunt in basi a c d. quare totum prisma a e ad prisma a f eandem proportionem habebit, quam altitudo e g ad f h altitudinem. 12. quinti Quòd cum prismata sint pyramidum tripla, & ipsæ pyramides, quarum eadem est basis quadrilatera, & altitudo prismatum altitudini æqualis, eam inter se proportionem habebunt, quam altitudines.



Si uero prismata bases æquales habeant, nõ easdem, sint duo eiusmodi prismata a e, f l: & sit basis prismatis a e quadrilaterum a b c d; & prismatis f l quadrilaterum f g h k. Dico prisma a e ad prisma f l ita esse, ut altitudo illius ad huius altitudinem. nam si altitudo sit eadem, intelligãtur duæ pyramides a b c d e, f g h k l, quæ iter se æquales erũt, 6. duodecimi cum æquales bases, & altitudinem eandem habeant. quare & prismata a e, f l, quæ sunt harũ pyramidum tripla, æqualia sint necesse est. ex quibus perspicue constat propositũ. 15. quinti Si uero altitudo prismatis f l sit maior, à prismate f l abscindatur prisma f m, quod æque altum sit, atq; ipsum a e,

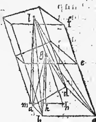
erunt eadem ratione prismata a e, f m inter se æqualia. quare similiter demonstrabitur prisma f m ad prisma f l eandem habere proportionem, quam prismatis f m altitudo ad altitudinem ipsius f l. ergo & prisma a e ad prisma f l eandem proportionem habebit, quam altitudo ad altitudinem. sequitur igitur ut & pyramides, quæ in æqualibus basibus constituũtur, eandem inter se se, quam altitudines, proportionem habeant.

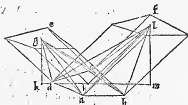




Sint deinde prismata a e, a f in eadem basi a b c d; quorũ axes cum basibus æquales angulos contineant: & sit prismatis

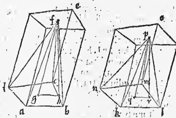
matis a e axis g h; & prismatis a f axis l h. Dico prisma a e ad prisma a f eam proportionem habere, quam g h ad h l. ducantur à punctis g l perpendiculares ad basis planum g K, l m: & iungantur k h, h m. Itaque quoniam anguli g h k, l h m sunt æquales, similiter ut supra demonstrabimus, triangula g h K, l h m similia esse; & ut g K ad l m, ita g h ad h l. habet autem prisma a e ad prisma a f eandem proportionem, quam altitudo g K ad altitudinem l m, sicuti demonstratum est. ergo & eandem habebit, quam g h, ad h l. pyramis igitur a b c d g ad pyramidem a b c d l eandem proportionem habebit, quam axis g h ad h l axem.





Denique sint prismata a e, K o in æqualibus basibus a b c d, k l m n constituta; quorum axes cum basibus æquales faciant angulos: sitq; prismatis a e axis f g, & altitudo f h: prismatis autem K o axis p q, & altitudo p r. Dico prisma a e ad prisma K o ita esse, ut f g ad p q. iunctis enim g h,

q r, eodem, quo supra, modo ostendemus f g ad p q, ut f h ad p r. sed prisma a e ad ipsum K o est, ut f h ad p r. ergo & ut f g axis ad axem p q. ex quibus fit, ut pyramis a b c d f ad pyramidẽ K l m n p eandem habeat proportionẽ, quã axis ad axẽ. quod demonstrã dũ fuerat.



Simili ratione in aliis prismatibus & pyramidibus eadem demonstrabuntur.

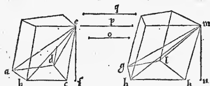
THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXI.

Prismata omnia, & pyramides inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

Sint duo prismata a e, g m: sitq; prismatis a e basis quadrilaterum a b c d, & altitudo e f: prismatis uero g m basis quadrilaterum g h K l, & altitudo m n. Dico prisma a e ad prisma g m proportionem habere compositam ex proportione basis a b c d ad basim g h k l, & ex proportione altitudinis e f, ad altitudinem m n.

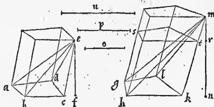
Sint enim primum e f, m n æquales: & ut basis a b c d ad basim g h K l, ita fiat linea, in qua o ad lineam, in qua p: ut autem e f ad m n, ita linea p ad lineam q. erunt lineæ p q inter se æquales. Itaque prisma a e ad prisma g m eã pro

proportionem habet, quam basis a b c d ad basim g h K l: si enim intelligantur duæ pyramides a b c d e, g h k l m, habebunt hæ inter se proportionem eandem, quam ipsarum bases ex sexta duodecimi elementorum. Sed ut basis a b c d ad g h K l basim, ita linea o ad lineam p; hoc est ad lineam q ei æqualem. ergo prisma a e ad prisma g m est, ut linea o ad lineam q. proportio autem o ad q cõposita est ex proportione o ad p, & ex proportione p ad q. quare prisma a e ad prisma g m, & idcirco pyramis a b c d e, ad pyramidem g h K l m proportionem habet ex eisdem proportionibus compositam, uidelicet ex proportione basis a b c d ad basim g h K l, & ex proportione altitudinis e f ad m n altitudinem. Quòd si lineæ e f, m n inæquales ponantur, sit e f minor: & ut e f ad m n, ita fiat linea p ad lineam u: de



inde ab ipsa m n abscindatur r n æqualis e f: & per r ducatur planum, quod oppositis planis æquidistans faciat sectionem s t. erit prisma a e, ad prisma g t, ut basis a b c d ad basim g h k l; hoc est ut o ad p: ut autem prisma g t ad prisma g m, ita altitudo r n; hoc est e f ad altitudinẽ m n; uidelicet linea p ad lineam u. ergo ex æquali prisma a e ad prisma g m est, ut linea o ad ipsam u. Sed proportio o ad u cõposita est ex proportione o ad p, quæ est basis a b c d ad basim g h K l; & ex proportione p ad u, quæ est altitudinis e f ad altitudinem m n. prisma igitur a e ad prisma g m 20.huius

compositam proportionem habet ex proportione basiũ, & proportione altitudinum. Quare & pyramis, cuius basis est quadrilaterum a b c d, & altitudo e f ad pyramidem,



cuius basis quadrilaterum g h K l, & altitudo m n, compositam habet proportionem ex proportione basium a b c d, g h k l, & ex proportione altitudinum e f, m n. quod quidem demonstrasse oportebat.

Ex iam demonstratis perspicuum est, prismata omnia, & pyramides, in quibus axes cum basibus æquales angulos continent, proportionem habere compositam ex basium proportione, & proportione axium. demonstratum est enim, axes inter se eandem proportionem habere, quam ipsæ altitudines.

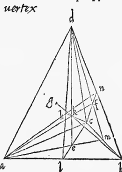
THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXII.

Cvivslibet pyramidis, & cuiuslibet coni, uel

uel coni portionis axis à centro grauitatis ita diuiditur, ut pars, quæ terminatur ad uerticem reliquæ partis, quæ ad basim, sit tripla.

Sit pyramis, cuius basis triangulum a b c; axis d e; & grauitatis centrum K. Dico lineam d k ipsius K e triplam esse. trianguli enim b d c centrum grauitatis sit punctum f; triãguli a d c centrũ g; & trianguli a d b sit h: & iungantur a f, b g, c h. Quoniam igitur centrũ grauitatis pyramidis in axe cõsistit: suntq; d e, a f, b g, c h eiusdẽ pyramidis axes: conueniunt omnes in idẽ punctũ k, quod est grauitatis centrum. 17.huius

Itaque animo concipiamus hanc pyramidem diuisam in quatuor pyramides, quarum bases sint ipsa pyramidis triangula; & axis punctum k quæ quidem pyramides inter se æquales sunt, ut demõstrabitur. Ducatur enĩ per lineas d c, d e planum secãs, ut sit ipsius, & basis a b c cõmunis sectio recta linea c e l: eiusdẽ uero & triãguli a d b sit linea d h l. erit linea a l æqualis ipsi l b: nam centrum grauitatis trianguli consistit in linea, quæ ab angulo ad dimidiam basim perducitur, ex tertia decima Archimedis. quare triangulum a c l æquale est triangulo b c l: & propterea pyramis, cuius basis triangulum a c l, uertex d, est æqualis pyramidi, cuius basis b c l triangulum, & idem uertex. pyramides enim, quæ ab eodẽ



1. sexti.

5. duodecimi.

sunt uertice, eandem proportionem habent, quam ipsarũ bases. eadem ratione pyramis a c l k pyramidi b c l k: & pyramis a d l k ipsi b d l k pyramidi æqualis erit. Itaque si à pyramide a c l d auferantur pyramides a c l k, a d l k: & à pyramide b c l d auferãtur pyramides b c l k, d b l k: quæ relinquuntur erunt æqualia. æqualis igitur est pyramis a c d k pyramidi b c d k. Rursus si per lineas a d, & ducatur planum quod pyramidem secet: sitq; eius & basis communis sectio a e m: similiter ostendetur pyramis a b d k æqualis pyramidi a c d k. ducto deniq; alio plano per lineas c a, a f: ut eius, & trianguli c d b communis sectio sit c f n, pyramis a b c k pyramidi a c d k æqualis demonstrabitur. cũ ergo tres pyramides b c d k, a b d k, a b c k uni, & eidem pyramidi a c d k sint æquales, omnes inter se se æquales erũt. Sed ut pyramis a b c d ad pyramidem a b c k, ita d e axis ad axem k e, ex uigesima propositione huius: sunt enim hæ pyramides in eadem basi, & axes cum basibus æquales continent angulos, quòd in eadem recta linea constituantur. quare diuidendo, ut tres pyramides a c d k, b c d k, a b d k ad pyramidem a b c k, ita d k ad k e. constat igitur lineam d k ipsius k e triplam esse. sed & a k tripla est k f: itemque b k ipsius k g: & c k ipsius k l tripla. quod eodem modo demonstrabimus.

Sit pyramis, cuius basis quadrilaterum a b c d; axis e f: & diuidatur e f in g, ita ut e g ipsius g f sit tripla. Dico centrum grauitatis pyramidis esse punctum g. ducatur enim linea b d diuidens basim in duo triangula a b d, b c d; ex quibus intelligãtur cõstitui duæ pyramides a b d e, b c d e: sitque pyramidis a b d e axis e h; & pyramidis b c d e axis e k: & iungatur h k, quæ per f transibit: est enim in ipsa h k centrum grauitatis magnitudinis compositæ ex triangulis a b d, b c d, hoc est ipsius quadrilateri. Itaque centrum grauitatis pyramidis a b d e sit punctum l: & pyramidis b c d e

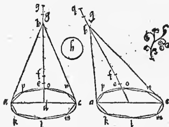
2. sexti. sit m. ducta igitur l m ipsi h m lineæ æquidistabit: nam e l ad

l h

l h eandem habet proportionem, quam e m ad m k, uidelicet triplam. quare linea l m ipsam e f secabit in puncto g: etenim e g ad g f est, ut e l ad l h. praeterea quoniam h k, l m aequidistant, erunt triangula h c f, l e g similia: itemq; inter se similia f e κ, g e m: & ut e f ad e g, ita h f ad l g: & ita f κ ad g m. ergo ut h f ad l g, ita f κ ad g m: & permutando ut h f ad f κ, ita l g ad g m. sed cum h sit centrum trianguli a b d, & κ triãguli b c d: punctũ uero f totius quadrilateri a b c d centrum: erit ex 8. Archimedis de centro grauitatis planorum h f ad f κ, ut triangulum b c d ad triangulum a b d: ut autem b c d triangulum ad triangulum a b d, ita pyramis b c d e ad pyramidem a b d e. ergo linea l g ad g m erit, ut pyramis b c d e ad pyramidẽ a b d e. ex quo sequitur, ut totius pyramidis a b c d e punctum g sit grauitatis centrum. Rursus sit pyramis basim habens pentagonum a b c d e: & axem f g: diuidaturq; axis in puncto h, ita ut f h ad h g triplam habeat proportionem. Dico h grauitatis centrũ esse pyramidis a b c d e f. iungatur enim e b: intelligaturq; pyramis, cuius uertex f, & basis triangulum a b e: & alia pyramis intelligatur eundem uerticem habens, & basim b c d e quadrilaterũ: sit autem pyramidis a b e f axis f κ, & grauitatis centrum l: & pyramidis b c d e f axis f m, & centrum grauitatis n: iunganturq; κ m, l n: quae per puncta g h transibunt. Rursus eodem modo, quo supra, demonstrabimus lineas K g m, l h n sibi ipsis aequidistare.

& denique punctum h pyramidis a b c d e f grauitatis esse centrum, & ita in aliis.

Sit conus, uel coni portio axem habens b d: seceturque plano per axem, quod sectionem faciat triangulum a b c: & b d axis diuidatur in e, ita ut b e ipsius e d sit tripla. Dico punctum e coni, uel coni portionis, grauitatis esse centrum. Si enim fieri potest, sit centrum f: & producatur e f extra figuram in g. quam uero proportionem habet g e ad e f, habeat basis coni, uel coni portionis, hoc est circulus, uel ellipsis circa diametrum a c ad aliud spacium, in quo h. Itaque in circulo, uel ellipsi plane describatur rectilinea figura a k l m c n o p, ita ut quæ relinquũtur portiones sint minores spacio h: & intelligatur pyramis basim habens rectilineam figuram a K l m c n o p, & axem b d; cuius quidem grauitatis centrum erit punctum e, ut iam demonstrauimus. Et quoniam portiones sunt minores spacio h, circulus, uel ellipsis ad portiones ma-



iorem proportionem habet, quam g e ad e f. sed ut circulus, uel ellipsis ad figuram rectilineam sibi inscriptam, ita conus, uel coni portio ad pyramidem, quæ figuram rectilineam pro basi habet; & altitudinem æqualem: etenim supra

pra demonstratum est, ita esse cylindrum, uel cylindri portionem ad prisma, cuius basis rectilinea figura, & æqualis altitudo. ergo per conuersionem rationis, ut circulus, uel ellipsis ad portiones, ita conus, uel coni portio ad portiones solidas. quare conus uel coni portio ad portiones solidas maiorem habet proportionem, quam g e ad e f: & diuidendo, pyramis ad portiones solidas maiorem proportionem habet, quam g f ad f e. fiat igitur q f ad f e ut pyramis ad dictas portiones. Itaque quoniam à cono uel coni portione, cuius grauitatis centrum est f, aufertur pyramis, cuius centrum e; reliquæ magnitudinis, quæ ex solidis portionibus constat, centrum grauitatis erit in linea e f protracta, & in puncto q. quod fieri non potest: est enim centrum grauitatis intra. Constat igitur coni, uel coni portionis grauitatis centrum esse punctum e. quæ omnia demonstrare oportebat. 8. huius

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXIII.

QVODLIBET frustum à pyramide, quæ triangularem basim habeat, abscissum, diuiditur in tres pyramides proportionales, in ea proportione, quæ est lateris maioris basis ad latus minoris ipsi respondens.

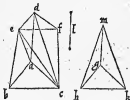
Hoc demonstrauit Leonardus Pisanus in libro, qui de praxi geometriæ inscribitur. Sed quoniam is adhuc impressus non est, nos ipsius demonstrationem breuiter perstringemus, rem ipsam secuti, non uerba. Sit frustum pyramidis a b c d e f, cuius maior basis triangulum a b c, minor d e f: & iunctis a e, e c, c d, per lineas a e, e c ducatur planum, secans frustum: itemque per lineas e c, c d; & per c d, d a alia plana ducantur, quæ diuident frustum in tres pyramides a b c e, a d c e, d e f c.

Dico eas proportionales esse in proportione, quæ est lateris a b ad latus d e, ita ut earum maior sit a b c e, media a d c e, & minor d e f c. Quoniam enim lineæ d e, a b æquidistant; & inter ipsas sunt triangula a b e, a d e;

1. sexti. erit triangulum a b e ad triangulum a d e, ut linea a b ad lineam d e. ut autem triangulum a b e ad triangulum a d e, ita pyramis

5. duodecimi. a b e c ad pyramidem a d e c: habent enim altitudinem eandem, quæ est à puncto c ad planum, in quo qua-

11. quinti. drilaterum a b e d. ergo ut a b ad d e, ita pyramis a b e c ad pyramidem a d e c.



Rursus quoniam æquidistantes sunt a c, d f; erit eadem

4. sexti. ratione pyramis a d c e ad pyramidem c d f e, ut a c ad d f. Sed ut a c ad d f, ita a b ad d e, quoniam triangula a b c, d e f similia sunt, ex nona huius. quare ut pyramis a b c e ad pyramidem a d c e, ita pyramis a d c e ad ipsam d e f c. frustum igitur a b c d e f diuiditur in tres pyramides proportionales in ea proportione, quæ est lateris a b ad d e latus, & earum maior est c a b e, media a d c e, & minor d e f c. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXIIII.

QVODLIBET frustum pyramidis, uel coni, uel coni portionis, plano basi æquidistanti ita secare, ut sectio sit proportionalis inter maiorem, & minorem basim.

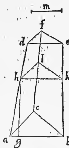
SIT frustum pyramidis a e, cuius maior basis triangulum a b c, minor d e f: & oporteat ipsum plano, quod basi æquidistet, ita secare, ut sectio sit proportionalis inter triangula a b c, d e f. Inueniatur inter lineas a b, d e media proportionalis, quæ sit b g: & à puncto g erigatur g h æquidistans b e, secansq; a d in h: deinde per h ducatur planum basibus æquidistans, cuius sectio sit triangulum h k l. Dico triangulum h k l proportionale esse inter triangula a b c, d e f, hoc est triangulum a b c ad triangulum h k l eandem habere proportionem, quam triangulum h k l ad ipsum d e f. Quoniam enim lineæ a b, h k æquidistantium planorum sectiones inter se æquidistant: atque æquidistant b k, g h: linea h k ipsi g b est æqualis: & propterea proportionalis inter a b, d e. quare ut a b ad h k, ita est h k ad d e. fiat ut h k ad d e, ita d e ad aliam lineam, in qua sit m. erit ex æquali ut a b ad d e, ita h k ad m. Et quoniam triangula a b c, h k l, d e f similia sunt; triangulũ a b c ad triangulum h k l est, ut linea a b ad lineam d e: triangulũ autem h k l ad ipsum d e f est, ut h k ad m. ergo triangulum a b c ad triangulum h k l eandem proportionem habet, quam triangulum h k l ad ipsum d e f. Eodem modo in aliis frustis pyramidis idem demonstrabitur.

16. undecimi

34. primi

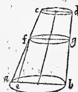
9 huius corol. 20. sexti

11. quinti



Sit frustum coni, uel coni portionis a d: & secetur plano per axem, cuius sectio sit a b c d, ita ut maior ipsius basis sit circulus, uel ellipsis circa diametrum a b; minor circa c d. Rursus inter lineas a b, c d inueniatur proportionalis b e: & ab e ducta e f æquidistante b d, quæ lineam c a in f secet,

per f planum basibus æquidistans ducatur, ut sit sectio circulus, uel ellipsis circa diametrum f g. Dico sectionem a b ad sectionem f g eandem proportionem habere, quam f g ad ipsam c d. Simili enim ratione, qua supra, demonstrabitur quadratum a b ad quadratum f g ita esse, ut quadratū
2. duodecimi f g ad c d quadratum. Sed circuli inter se eandem proportionem habent, quam diametrorum quadrata. ellipses autem circa a b, f g, c d, quæ similes sunt, ut ostendimus in cōmentariis in principium libri Archimedis de conoidibus, & sphæroidibus, eam habēt proportionem, quam quadrata diametrorum, quæ eiusdem rationis sunt, ex corollario septimæ propositionis eiusdem libri. ellipses enim nunc appello ipsa spacia ellipsibus contenta. ergo circulus, uel ellipsis a b ad circulū, uel ellipsim f g eam proportionem habet, quam circulus, uel ellipsis f g ad circulum uel ellipsim c d. quod quidem faciendum proposuimus.

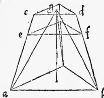


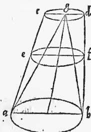
THEOREMA XX. PROPOSITIO XXV.

QVODLIBET frustum pyramidis, uel coni, uel coni portionis ad pyramidem, uel conum, uel coni portionem, cuius basis eadem est, & æqualis altitudo, eandem proportionē habet, quam utræque bases, maior, & minor simul sumptæ vnà cū ea, quæ inter ipsas sit proportionalis, ad basim maiorem.

Sit

SIT frustũ pyramidis, uel coni, uel coni portionis a d, cuius maior basis a b, minor c d. & secetur altero plano basi æquidistante, ita ut sectio e f sit proportionalis inter bases a b, c d. constituatur autẽ pyramis, uel conus, uel coni portio a g b, cuius basis sit eadem, quæ basis maior frusti, & altitudo æqualis. Dico frustum a d ad pyramidem, uel conum, uel coni portionem a g b eandem proportionẽ habere, quã utræque bases, a b, c d unà cum e f ad basim a b. est enim frustum a d æquale pyramidi, uel cono, uel coni portioni, cuius basis ex tribus basibus a b, e f, c d constat; & altitudo ipsius altitudini est æqualis: quod mox ostendemus. Sed pyramides, coni, uel coni portiões, quæ sunt æquali altitudine, eãdem inter se, quam bases, proportionem habent, sicuti demonstratum est, partim ab Euclide in duodecimo libro elementorum, partim à nobis in cõmentariis in undecimam propositionẽ Archimedis de conoidibus, & sphæroidibus. quare pyramis, uel conus, uel coni portio, cuius basis est tribus illis basibus æqualis ad a g b eam habet proportionem, quam bases a b, e f, c d ad a b basim. Frustum igitur a d ad a g b



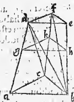


6.11. duodecimi

pyramidem, uel conum, uel coni portionem eandem proportionem habet, quam bases a b, c d unà cum e f ad basim a b. quod demonstrare uolebamus.

Frustum uero a d æquale esse pyramidi, uel cono, uel coni portioni, cuius basis constat ex basibus a b, c d, e f, & altitudo frusti altitudini est æqualis, hoc modo ostendemus.

Sit frustum pyramidis a b c d e f, cuius maior basis triangulum a b c; minor d e f: & secetur plano basibus æquidistante, quod sectionem faciat triangulum g h k inter triangula a b c, d e f proportionale. Iam ex iis, quæ demonstrata sunt in 23. huius, patet frustum a b c d e f diuidi in tres pyramides proportionales; & earum maiorem esse pyramidē a b c d minorē uero d e f b. ergo pyramis à triangulo g h k constituta, quæ altitudinem habeat frusti altitudini æqualem, proportionalis est inter pyramides a b c d, d e f b: & idcirco frustum a b c d e f tribus dictis pyramidibus æquale erit. Itaque si intelligatur alia pyramis æque alta, quæ basim habeat ex tribus basibus a b c, d e f, g h k constantem; perspicuum est ipsam eisdem pyramidibus, & propterea ipsi frusto æqualem esse.



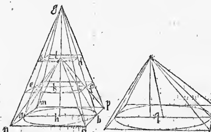
Rursus sit frustum pyramidis a g, cuius maior basis quadrilaterum a b c d, minor e f g h: & secetur plano basibus æquidistante, ita ut fiat sectio quadrilaterum K l m n, quod sit proportionale inter quadrilatera a b c d, e f g h. Dico pyramidem, cuius basis sit æqualis tribus quadrilateris a b c d, k l m n, e f g h, & altitudo æqualis altitudini frusti, ipsi frusto a g æqualem esse. Ducatur enim planum per lineas f b, h d,

quod

quod diuidat frustum in duo frusta triangulares bases habentia, uidelicet in frustum a b d e f h, & in frustū b c d f g h. erit triangulum k l n proportionale inter triangula a b d, e f h: & triangulum l m n proportionale inter b c d, f g h. sed pyramis æque alta, cuius basis constat ex tribus triangulis a b d, k l n, e f h, demonstrata est frusto a b d e f h æqualis: & similiter pyramis, cuius basis constat ex triangulis b c d, l m n, f g h æqualis frusto b c d f g h: componuntur autem tria quadrilatera a b c d, k l m n, e f g h è sex triangulis iam dictis. pyramis igitur basim habens æqualem tribus quadrilateris, & altitudinem eandem, ipsi frusto a g est æqualis. Eodem modo illud demōstrabitur in aliis eiusmodi frustis.

Sit frustum coni, uel coni portionis a d; cuius maior basis circulus, uel ellipsis circa diametrum a b; minor circa c d: & secetur plano, quod basibus æquidistet, faciatq; sectionem circulum, uel ellipsim circa diametrum e f, ita ut inter circulos, uel ellipses a b, c d sit proportionalis. Dico conum, uel coni portionem, cuius basis est æqualis tribus circulis, uel tribus ellipsibus a b, e f, c d; & altitudo eadem, quæ frusti a d, ipsi frusto æqualem esse. producatur enim frusti superficies quousque coeat in unum punctum, quod sit g: & coni, uel coni portionis a g b axis sit g h, occurrens planis a b, e f, c d in punctis h k l: circa circulum uero describatur quadratum m n o p, & circa ellipsim rectangulū m n o p, quod ex ipsius diametris constat: iunctisq; g m, g n, g o, g p, ex eodem uertice intelligatur pyramis basim habens dictum quadratum, uel rectangulum: & plana in quibus sunt circuli, uel ellipses e f, c d usque ad eius latera

producantur. Quoniam igitur pyramis secatur planis basi
9. huius æquidistantibus, sectiones similes erunt: atque erunt quadrata, uel rectangula circa circulos, uel ellipses descripta, quemadmodum & in ipsa basi. Sed cum circuli inter se eã
2. duodecimi. proportionem habeant, quam diametrorum quadrata: itemq; ellipses eam quam rectangula ex ipsarum diametris
7. de conoidibus & sphæroidibus constantia: & sit circulus, uel ellipsis circa diametrum e f



proportionalis inter circulos, uel ellipses a b, c d; erit rectangulum e f etiam inter rectangula a b, c d proportionale: per rectangulum enim nunc breuitatis causa etiã ipsum quadratum intelligemus. quare ex iis, quæ proxime dicta sunt, pyramis basim habens æqualem dictis rectangulis, & altitudinem eandem, quam frustum a d, ipsi frusto à pyramide abscisso æqualis probabitur. ut autem rectangulum c d ad rectangulũ e f, ita circulus, uel ellipsis c d ad e f circulum, uel ellipsim: componendoq; ut rectangula c d, e f, ad e f rectangulum, ita circuli, uel ellipses c d, e f, ad e f: & ut rectangulum e f ad rectangulum a b; ita circulus, uel ellipsis e f ad a b circulum, uel ellipsim. ergo ex æquali, & componendo, ut rectãgula c d, e f, a b ad ipsum a b, ita circuli,

culi, uel ellipses c d, e f a b ad circulum, uel ellipsim a b. Intelligatur pyramis q basim habens æqualem tribus rectangulis a b, e f, c d; & altitudinem eãdẽ, quam frustum a d. intelligatur etiam conus, uel coni portio q, eadem altitudine, cuius basis sit tribus circulis, uel tribus ellipsibus a b, e f, c d æqualis. postremo intelligatur pyramis a l b, cuius basis sit rectangulum m n o p, & altitudo eadem, quæ frusti: itemq; intelligatur conus, uel coni portio a l b, cuius basis circulus, uel ellipsis circa diametrum a b, & eadem altitudo. ut igitur rectangula a b, e f, c d ad rectangulum a b, ita pyramis q ad pyramidem a l b; & ut circuli, uel ellipses a b, e f, c d ad a b circulum, uel ellipsim, ita conus, uel coni portio q ad conum, uel coni portionem a l b. conus igitur, uel coni portio q ad conum, uel coni portionem a l b est, ut pyramis q ad pyramidem a l b. sed pyramis q l b ad pyramidem a g b est, ut altitudo ad altitudinem, ex 20. huius: & ita est conus, uel coni portio a l b ad conum, uel coni portionem a g b ex 14. duodecimi elementorum, & ex iis, quæ nos demonstrauimus in commentariis in undecimam de conoidibus, & sphæroidibus, propositione quarta. pyramis autem a g b ad pyramidem c g d proportionem habet compositam ex proportione basium & proportione altitudinum, ex uigesima prima huius: & similiter conus, uel coni portio a g b ad conum, uel coni portionem c g d proportionem habet compositã ex eisdem proportionibus, per ea, quæ in dictis commentariis demonstrauimus, propositione quinta, & sexta: altitudo enim in utrisque eadem est, & bases inter se se eandem habent proportionem. ergo ut pyramis a g b ad pyramidem c g d, ita est conus, uel coni portio a g b ad a g d conum, uel coni portionem: & per conuersionẽ rationis, ut pyramis a g b ad frustũ à pyramide abscissum, ita conus uel coni portio a g b ad frustum a d. ex æquali igitur, ut pyramis q ad frustum à pyramide abscissum, ita conus uel coni portio q ad

6. 11. duodecimi

frustum a d. Sed pyramis q æqualis est frusto à pyramide abscisso, ut demonstrauimus. ergo & conus, uel coni portio q, cuius basis ex tribus circulis, uel ellipsibus a b, e f, c d constat, & altitudo eadem, quæ frusti: ipsi frusto a d est æqualis. atque illud est, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXVI.

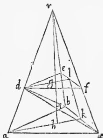
CVIVSLIBET frusti à pyramide, uel cono, uel coni portione abscissi, centrum grauitatis est in axe, ita ut eo primum in duas portiones diuiso, portio superior, quæ minorem basim attingit ad portionem reliquam eam habeat proportionem, quam duplum lateris, uel diametri maioris basis, unà cum latere, uel diametro minoris, ipsi respondente, habet ad duplum lateris, uel diametri minoris basis unà cũ latere, uel diametro maioris: deinde à puncto diuisionis quarta parte superioris portionis in ipsa sumpta: & rursus ab inferioris portionis termino, qui est ad basim maiorem, sumpta quarta parte totius axis: centrum sit in linea, quæ his finibus continetur, atque in eo lineæ puncto, quo sic diuiditur, ut tota linea ad partem propinquiorem minori basi, eãdem proportionem habeat, quam frustum ad pyramidẽ, uel conum, uel coni portionem, cuius basis sit eadem, quæ basis maior, & altitudo frusti altitudini æqualis.

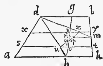
sit

Sit fruſtum a e a pyramide, quæ triangularem baſim habeat abſciſſum: cuius maior baſis triangulum a b c, minor d e f; & axis g h. ducto autem plano per axem & per lineã d a, quod ſectionem faciat d a K l quadrilaterum; puncta K l lineas b c, e f bifariam ſecabunt. nam cum g h ſit axis fruſti: erit h centrum grauitatis trianguli a b c: & g centrum trianguli d e f: centrum uero cuiuslibet trianguli eſt in recta linea, quæ ab angulo ipſius ad dimidiã baſim ducitur ex decimatertia primi libri Archimedis de cẽtro grauitatis planorum. quare centrũ grauitatis trapezii b c f e eſt in linea K l, quod ſit m: & à puncto m ad axem ducta m n ipſi a k, uel d l æquidiſtante; erit axis g h diuiſus in portiones g n, n h, quas diximus: eandem enim proportionem habet g n ad n h, quã l m ad m k. At l m ad m K habet eam, quã duplum lateris maioris baſis b c unà cum latere minoris e f ad duplum lateris e f unà cum latere b c, ex ultima eiuſdem libri Archimedis. Itaque à linea n g abſcindatur, quarta pars, quæ ſit n p: & ab axe h g abſcindatur itidem quarta pars h o: & quam proportionem habet fruſtum ad pyramidem, cuius maior baſis eſt triangulum a b c, & altitudo ipſi æqualis; habeat o p ad p q. Dico centrum grauitatis fruſti eſſe in linea p o, & in puncto q. namque ipſum eſſe in linea g h manifeſte conſtat. protractis enim fruſti pla

3. diffi. huius.

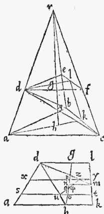
Vltima eiuſdẽ libri Archimedis.





nis, quousque in unum punctum r conueniant; erit pyramidis a b c r, & pyramidis d e f r grauitatis centrum in linea r h. ergo & reliquæ magnitudinis, uidelicet frusti centrum in eadem linea necessario comperietur. Iungantur d b, d c, d h, d m: & per lineas d b, d c ducto altero plano intelligatur frustum in duas pyramides diuisum: in pyramidem quidem, cuius basis est triangulum a b c, uertex d: & in eam, cuius idem uertex, & basis trapezium b c f e. erit igitur pyramidis a b c d axis d h, & pyramidis b c f e d axis d m: atque erunt tres axes g h, d h, d m in eodem plano d a K l. ducatur præterea per o linea s t ipsi a K æquidistas, quæ lineam d h in u secet: per p uero ducatur x y æquidistans eidem, secansque d m in z: & iungatur z u, quæ secet g h in φ. transibit ea per q: & erunt φ q unum, atque idem punctum; ut inferius apparebit. Quoniam igitur linea u o

2.sexti. æquidistat ipsi d g, erit d u ad u h, ut g o ad o h. Sed g o tripla est o h. quare & d u ipsius u h est tripla: & ideo pyramidis a b c d centrum grauitatis erit punctum u. Rursus quoniam z y ipsi d l æquidistat, d z ad z m est, ut l y ad y m: estque l y ad y m, ut g p ad p n. ergo d z ad z m est, ut g p ad p n. Quòd cum g p sit tripla p n; erit etiam d z ipsius z m tripla. atque ob eandem causam punctum z est centrũ grauitatis pyramidis b c f e d. iuncta igitur z u, in ea erit cẽtrum



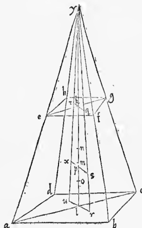
grauitatis magnitudinis, quæ ex utrisque pyramidibus cõstat; hoc est ipsius frusti. Sed frusti centrum est etiam in axe g h. ergo in puncto φ, in quo lineæ z u, g h conueniunt. Itaque u φ ad φ z eam proportionem habet, quam pyramis b c f e d ad pyramidem a b c d. & componendo u z ad z φ. eam habet, quam frustum ad pyramidem a b c d. Vt uero u z ad z φ, ita o p ad p φ ob similitudinem triangulorum, u o φ, z p φ. quare o p ad p φ est ut frustum ad pyramidem a b c d. sed ita erat o p ad p q. æquales igitur sunt p φ, p q: & q φ unum atque idem punctum. ex quibus sequitur lineam z u secare o p in q: & propterea pũctum q ipsius frusti grauitatis centrum esse.

8. primi libri Archimedis de cẽtro grauitatis planorum.

7. quinti.

Sit frustum a g à pyramide, quæ quadrangularem basim habeat abscissum, cuius maior basis a b c d, minor e f g h, & axis k l. diuidatur autem primũ k l, ita ut quam proportionem habet duplum lateris a b unà cum latere e f ad duplum lateris e f unà cum a b; habeat k m ad m l. deinde à pũcto m ad k sumatur quarta pars ipsius m k, quæ sit m n. & rursus ab l sumatur quarta pars totius axis l k, quæ sit l o. postremo fiat o n ad n p, ut frustum a g ad pyramidẽ, cuius basis sit eadem, quæ frusti, & altitudo æqualis. Dico punctum p frusti a g grauitatis centrum esse. ducantur enim a c, e g: & intelligantur duo frusta triangulares bases habentia, quorum alterum l f ex basibus a b c, e f g cõstet; alterum l h ex basibus a c d, e g h. Sitq; frusti l f axis q r; in quo grauitatis centrum s: frusti uero l h axis t u, & x grauitatis centrum: deinde iungantur u r, t q, x s. transibit u r per l: quoniam l est centrum grauitatis quadranguli a b c d: & puncta r u grauitatis centra triangulorum a b c, a c d; in quæ quadrangulum ipsum diuiditur. eadem quoque ratione t q per punctum k transibit. At uero proportiones, ex quibus frustorum grauitatis centra inquirimus, eædem sunt in toto frusto a g, & in frustis l f, l h. Sunt enim per octauam huius quadrilatera a b c d, e f g h similia:

itemq; similia triangula a b c, e f g: & a c d, e g h. idcircoq; latera sibi ipsis respondentia eandem inter se se proportionem seruant. Vt igitur duplum lateris a b unà cum latere e f ad duplum lateris e f unà cum a b, ita est duplum a d lateris unà cum latere e h ad duplum e h unà cum a d: & ita in aliis. Rursus frustum a g ad pyramidẽ, cuius eadem est basis, & æqualis altitudo eandem proportionẽ habet, quam frustũ l f ad pyramidẽ, quæ est eadẽ basi, & æquali altitudine: & similiter quam l h frustum ad pyramidem, quæ ex eadẽ basi, & æquali altitudine constat. nam si inter ipsas bases mediæ proportionales constituantur, tres bases simul sumptæ ad maiorem basim in omnibus eodem modo se habebunt. Vnde fit, ut axes K l, q r, t u à punctis p s x in eandem proportionem secentur. ergo linea x s per p transibit: & lineæ r u, s x, q t inter se æquidistantes erunt. Itaque cum frusti a g latera producta

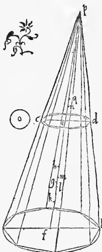


2. sexti.

ducta fuerint, ita ut in unum punctum y coeant, erunt triãgula u y l, x y p, t y k, inter se similia: & similia etiam triangula l y r, p y s, k y q. quare ut in 19 huius, demonstrabitur x p, ad p s: itemq; t k ad k q candem habere proportionẽ, quam u l ad l r. Sed ut u l ad l r, ita est triangulum a b c ad triangulum a c d: & ut t k ad K q, ita triangulum e f g ad triangulum e g h. Vt autem triangulum a b c ad triangulum a c d, ita pyramis a b c y ad pyramidem a c d y. & ut triangulum e f g ad triangulum e g h, ita pyramis e f g y ad pyramidem e g h y; ergo ut pyramis a b c y ad pyramidẽ a c d y, ita pyramis e f g y ad pyramidem e g h y. reliquum igitur frustũ l f ad reliquum frustũ l h est ut pyramis a b c y ad pyramidem a c d y, hoc est ut u l ad l r, & ut x p ad p s. Quod cum frusti l f centrum grauitatis sit s: & frusti l h sit centrum x: constat punctum p totius frusti a g grauitatis esse centrum. Eodem modo fiet demonstratio etiam in aliis pyramidibus. 19. quinti 8. Archimedis.

Sit frustum a d à cono, uel coni portione abscissum, cuius maior basis circulus, uel ellipsis circa diametrum a b; minor circa diametrum c d: & axis e f. diuidatur autẽ e f in g, ita ut e g ad g f eandem proportionem habeat, quam duplum diametri a b unà cum diametro c d ad duplum c d unà cum a b. Sitq; g h quarta pars lineæ g e: & sit f K item quarta pars totius f e axis. Rursus quam proportionem habet frustum a d ad conum, uel coni portionem, in eadẽ basi, & æquali altitudine, habeat linea K h ad h l. Dico punctum l frusti a d grauitatis centrum esse. Si enim fieri potest, sit m centrum: producaturq; l m extra frustum in n: & ut n l ad l m, ita fiat circulus, uel ellipsis circa diametrũ a b ad aliud spacium, in quo sit o. Itaque in circulo, uel ellipsi circa diametrum a b rectilinea figura plane describatur, ita ut quæ relinquuntur portiones sint o spacio minores: & intelligatur pyramis a p b, basim habens rectilineam figuram in circulo, uel ellipsi a b descriptam: à qua

frustum pyramidis sit abscissum. erit ex iis quæ proxime tradidimus, frusti pyramidis a d centrum grauitatis l. Quoniam igitur portiones spacio o minores sunt; habebit circulus, uel ellipsis a b ad portiones dictas maiorẽ proportionem, quàm n l ad l m. sed ut circulus, uel ellipsis a b ad portiones, ita a p b conus, uel coni portio ad solidas portiones, id quod supra demonstratum est: & ut circulus



22.huius uel ellipsis c d ad portiones, quæ ipsi insunt, ita conus, uel coni portio c p d ad solidas ipsius portiones. Quòd cum figuræ in circulis, uel ellipsibus a b c d descriptæ similes sint, erit proportio circuli, uel ellipsis a b ad suas portiones, eadẽ, quæ circuli uel ellipsis c d ad suas. ergo conus, uel coni portio a p b ad portiones solidas cãdem habet proportionẽ, quam conus, uel coni portio c p d ad solidas ipsius

19.quinti portiones. reliquum igitur coni, uel coni portionis frustũ, scilicet a d ad reliquas portiones solidas in ipso contentas eandem proportionẽ habet, quam conus, uel coni portio a p b ad solidas portiones: hoc est eandem, quam circulus, uel ellipsis a b ad portiones planas. quare frustum coni, uel coni portionis a d ad

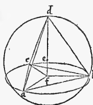
ad portiones solidas maiorem habet proportionẽ, quàm n l ad l m: & diuidendo frustum pyramidis ad dictas portiones maiorem proportionem habet, quàm n m ad m l. fiat igitur ut frustum pyramidis ad portiones, ita q m ad m l. Itaque quoniam à frusto coni, uel coni portionis a d, cuius grauitatis centrum est m, aufertur frustum pyramidis habens centrum l; erit reliquæ magnitudinis, quæ ex portionibus solidis constat; grauitatis cẽtrum in linea l m producta, atque in puncto q, extra figuram posito: quod fieri nullo modo potest. relinquitur ergo, ut punctum l sit frusti a d grauitatis centrum. quæ omnia demonstranda proponebantur.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXVII.

OMNIUM solidorum in sphæra descriptorum, quæ æqualibus, & similibus basibus continentur, centrum grauitatis est idem, quod sphæræ centrum.

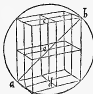
Solida eiusmodi corpora regularia appellare solent, de quibus agitur in tribus ultimis libris elementorum: sunt autem numero quinque, tetrahedrum, uel pyramis, hexahedrum, uel cubus, octahedrum, dodecahedrum, & icosahedrum.

Sit primo a b c d pyramis ĩ sphæra descripta, cuius sphæræ centrum sit e. Dico e pyramidis a b c d grauitatis esse centrum. Si enim iuncta d e producatur ad basim a b c in f; ex iis, quæ demonstrauit Campanus in quartodecimo libro elementorum, propositione decima quinta, & decima septima, erit f centrum circuli circa triangulum a b c descripti: atque erit e f sexta pars ipsius sphæræ axis. quare ex prima huius constat trianguli a b c grauitatis centrum esse punctum f: & idcirco lineam d f esse pyramidis axem.



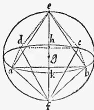
At cum e f sit sexta pars axis sphæræ, erit d e tripla e f. ergo punctum e est grauitatis centrum ipsius pyramidis: quod in uigesima secunda huius demonstratum fuit. Sed e est centrum sphæræ. Sequitur igitur, ut centrum grauitatis pyramidis in sphæra descriptæ idem sit, quod ipsius sphæræ centrum.

Sit cubus in sphæra descriptus a b, & oppositorum planorum lateribus bifariam diuisis, per puncta diuisionum plana ducantur, ut communis ipsorum sectio sit recta linea c d. Itaque si ducatur a b, solidi scilicet diameter, lineæ a b, c d ex trigesimanona undecimi sese bifariam secabunt. secent autem in puncto e. erit e centrũ grauitatis solidi a b, id quod demonstratum est in octaua huius. Sed quoniam a b est sphæræ diametro æqualis, ut in decima quinta propositione tertii decimi libri elemẽtorum ostenditur: punctum e sphæræ quoque centrum erit. Cubi igitur in sphæra descripti grauitatis centrum idem est, quod centrum ipsius sphæræ.



Sit octahedrum a b c d e f, in sphæra descriptum, cuius sphæræ centrum sit g. Dico punctum g ipsius octahedri grauitatis centrum esse. Constat enim ex iis, quæ demonstrata sunt à Campano in quinto decimo libro elementorum, propositione sextadecima eiusmodi solidum diuidi in duas pyramides æquales, & similes; uidelicet in pyramidem,

dem, cuius basis est quadratum a b c d, & altitudo e g: & in pyramidem, cuius eadẽ basis, altitudoq; f g; ut sint e g, g f semidiametri sphæræ, & linea una. Cũ igitur g sit sphæræ centrum, erit etiam centrum circuli, qui circa quadratũ a b c d describitur: & propterea eiusdem quadrati grauitatis centrum: quod in prima propositione huius demonstratum est. quare pyramidis a b c d e axis erit e g: & pyramidis a b c d f axis f g. Itaque sit h centrum grauitatis pyramidis a b c d e, & pyramidis a b c d f centrum sit K: perspicuum est ex uigesima secunda propositione huius, lineã e h triplam esse h g: cõ ponendoq; e g ipsius g h quadruplam. & eadẽ ratione f g quadruplã ipsius g K. quod cum e g, g f sint æquales, & h g, g K necessario æquales erunt. ergo ex quarta propositione primi libri Archimedis de cẽtro grauitatis planorũ, totius octahedri, quod ex dictis pyramidibus constat, centrum grauitatis erit punctum g idem, quod ipsius sphæræ centrum.

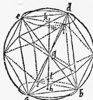


Sit icosahedrum a d descriptum in sphæra, cuius centrũ sit g. Dico g ipsius icosahedri grauitatis esse centrum. Si enim ab angulo a per g ducatur recta linea usque ad sphæræ superficiem; constat ex sexta decima propositione libri tertii decimi elementorum, cadere eam in angulum ipsi a oppositum. cadat in d: sitq; una aliqua basis icosahedri triangulum a b c: & iunctæ b g, c g producantur, & cadant in angulos e f, ipsis b c oppositos. Itaque per triangula a b c, d e f ducantur plana sphæram secantia, erunt hæ se-

ctiones circuli ex prima propositione sphæricorum Theodosii: unus quidem circa triangulum a b c descriptus: alter uero circa d e f: & quoniam triangula a b c, d e f æqualia sunt, & similia; erunt ex prima, & secunda propositione duodecimi libri elementorum, circuli quoque inter se se æquales. postremo à centro g ad circulum a b c perpendicularis ducatur g h; & alia perpendicularis ducatur ad circulum d e f, quæ sit g k; & iungantur a h, d k. perspicuum est ex corollario primæ sphæricorum Theodosii, punctum h centrum esse circuli a b c, & k centrum circuli d e f. Quoniam igitur triangulorum g a h, g d K latus a g est æquale lateri g d; sunt enim à centro sphæræ ad superficiem: atque est a h æquale d k: & ex sexta propositione libri primi sphæricorum Theodosii g h ipsi g K: triangulum g a h æquale erit, & simile g d k triangulo: & angulus a g h æqualis angulo d g K. sed anguli a g h, h g d sunt æquales duobus

13. primi rectis. ergo & ipsi h g d, d g k duobus rectis æquales erunt.

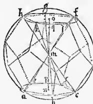
14. primi & idcirco h g, g K una, atque eadem erit linea. cum autem h sit centrũ circuli, & trianguli a b c grauitatis centrũ probabitur ex iis, quæ in prima propositione huius tradita sunt. quare g h erit pyramidis a b c g axis. & ob eandem caussam g k axis pyramidis d e f g. Itaque centrum grauitatis pyramidis a b c g sit pũctum l, & pyramidis d e f g sit m. Similiter ut supra demonstrabimus m g, g l inter se æquales esse, & punctum g grauitatis centrum magnitudinis, quæ ex utrisque pyramidibus constat. eodem modo demonstrabitur, quarumcunque duarum pyramidum, quæ opponuntur, grauitatis centrũ



esse

esse punctum g. Sequitur ergo ut icosahedri centrum grauitatis sit idem, quod ipsius sphæræ centrum.

Sit dodecahedrum a f in sphæra designatum, sitque sphæræ centrum m. Dico m centrum esse grauitatis ipsius dodecahedri. Sit enim pentagonum a b c d e una ex duodecim basibus solidi a f: & iuncta a m producatur ad sphæræ superficiem. cadet in angulum ipsi a oppositum; quod colligitur ex decima septima propositione tertiidecimi libri elementorum. cadat in f. at si ab aliis angulis b c d e per cẽtrum itidem lineæ ducantur ad superficiem sphæræ in puncta g h k l; cadent hæ in alios angulos basis, quæ ipsi a b c d basi opponitur. transeant ergo per pentagona a b c d e, f g h k l plana sphæram secantia, quæ facient sectiones circulos æquales inter se: postea ducantur ex centro sphæræ m perpendiculares ad plana dictorum circulorũ; ad circulum quidem a b c d e perpendicularis m n: & ad circulum f g h k l ipsa m o, erunt puncta n o circulorũ centra: & lineæ m n, m o inter se æquales: quòd circuli æquales sint. Eodem modo, quo supra, demonstrabimus lineas m n, m o in unã atque eandem lineam conuenire. ergo cum puncta n o sint centra circulorum, constat ex prima huius & pentagonorũ grauitatis esse centra: idcircoq; m n, m o pyramidum a b c d e m, f g h k l m axes. ponatur a b c d e m pyramidis grauitatis centrum p: & pyramidis f g h k l m ipsum q centrum. erunt p m, m q æquales, & punctum m grauitatis centrum magnitudinis, quæ ex ipsis pyramidibus constat. eodẽ modo probabitur quarumlibet pyramidum, quæ è regione opponuntur, centrũ



corol. primæ sphæricorum Theod.

6. primi sphæricorum.

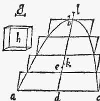
grauitatis esse punctum m. patet igitur totius dodecahedri, centrum grauitatis idē esse, quod & sphæræ ipsum comprehendentis centrum. quæ quidem omnia demonstrasse oportebat.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXVIII.

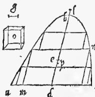
DATA qualibet portione conoidis rectanguli, abscissa plano ad axem recto, uel non recto; fieri potest, ut portio solida inscribatur, uel circumscribatur ex cylindris, uel cylindri portionibus, æqualem habentibus altitudinem, ita ut recta linea, quæ inter centrum grauitatis portionis, & figuræ inscriptæ, uel circumscriptæ interiicitur, sit minor qualibet recta linea proposita.

Sit portio conoidis rectanguli a b c, cuius axis b d, grauitatisq; centrum e: & sit g recta linea proposita. quam uero proportionem habet linea b e ad lineam g, eandem habeat portio conoidis ad solidum h: & circumscribatur portioni figura, sicuti dictum est, ita ut portiones reliquæ sint solido h minores: cuius quidem figuræ centrum grauitatis sit punctum k. Dico lineā k e minorem esse linea g propositа. nisi enim sit minor, uel æqualis, uel maior erit. & quo-
8.quinti. niam figura circumscripta ad reliquas portiones maiorem proportionem habet, quàm portio conoidis ad solidum h; hoc est maiorem, quàm b e ad g: & b e ad g non minorem habet proportionem, quàm ad k e, propterea quod k e non ponitur minor ipsa g: habebit figura circumscripta ad portiones reliquas maiorem proportionem quàm b e ad e k:
19.quinti ex tradi-tione Cā-pani. & diuidendo portio conoidis ad reliquas portiones habebit maiorem, quàm b k ad k e. quare si fiat ut portio conoidis

noidis ad portiones reliquas, ita alia linea, quæ sit l k ad k e: erit l k maior, quàm b k: & ideo punctum l extra portionem cadet. Quoniã igitur à figura circumscripta, cuius grauitatis centrum est k, aufertur portio conoidis, cuius centrum e. habetq; l K ad K e eam proportionem, quam portio conoidis ad reliquas portiones; erit punctum l extra portionem cadẽs, centrum magnitudinis ex reliquis portionibus compositæ. illud autem fieri nullo modo potest. quare constat lineam k e ipsa g linea proposita minorem esse.



Rursus inscribatur portioni figura, uidelicet cylindrus m n, ut sit ipsius altitudo æqualis dimidio axis b d: & quam proportionem habet b e ad g, habeat m n cylindrus ad solidum o. inscribatur deinde eidem alia figura, ita ut portiones reliquæ sint solido o minores: & centrum grauitatis figuræ sit p. Dico lineam p e ipsa g minorẽ esse. si enim non sit minor, eodem, quo supra modo demonstrabimus figuram inscriptam ad reliquas portiones maiorem proportionem habere, quàm b e ad e p. & si fiat alia linea l e ad e p, ut est figura inscripta ad reliquas portiones, pũctum l extra por



tionem cadet: Itaque cum à portione conoidis, cuius grauitatis centrum e auferatur inscripta figura, centrum habens p: & sit l e ad e p, ut figura inscripta ad portiones reliquas: erit magnitudinis, quæ ex reliquis portionibus constat, centrum grauitatis punctum l, extra portionem cadens. quod fieri nequit. ergo linea p e minor est ipsa g linea proposita.

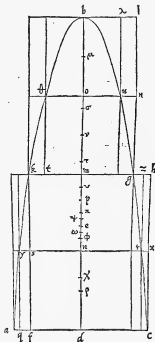
Ex quibus perspicuum est centrum grauitatis figuræ inscriptæ, & circumscriptæ eo magis accedere ad portionis centrum, quo pluribus cylindris, uel cylindri portionibus constet: fiatq; figura inscripta maior, & circumscripta minor. & quanquam continenter ad portionis centrũ propius admoueatur: nunquam tamen ad ipsum perueniet. sequeretur enim figuram inscriptam, nõ solum portioni, sed etiam circumscriptæ figuræ æqualem esse. quod est absurdum.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIX.

CUIUSLIBET portionis conoidis rectanguli axis à cẽtro grauitatis ita diuiditur, ut pars quæ terminatur ad uerticem, reliquæ partis, quæ ad basim sit dupla.

SIT portio conoidis rectanguli uel abscissæ plano ad axem recto, uel non recto: & secta ipsa altero plano per axẽ sit superficiei sectio a b c rectanguli coni sectio, uel parabole; plani abscindentis portionem sectio sit recta linea a c: axis portionis, & sectionis diameter b d. Sumatur autem in linea b d punctum e, ita ut b e sit ipsius e d dupla. Dico e por-

e portionis a b c grauitatis esse centrum. Diuidatur enim b d bifariam in m: & rursus d m, m b bifariam diuidantur in punctis n, o: inscribaturq; portioni figura solida, & altera circumscribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus, ut superius dictũ est. Sit autem primum figura inscripta cylĩdrus f g: & circũscripta ex cylindris a h, K l constet. punctum n erit centrum grauitatis figuræ inscriptæ, mediũ scilicet ipsius d m axis: atq; idẽ erit centrum cylindri a h: & cylindri k l centrũ o, axis b m medium. quare si li- 7.huius



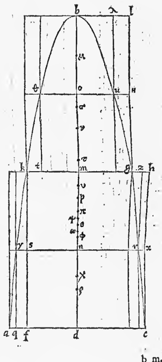
neam o n ita diuiserimus in p, ut quã proportionẽ habet cylindrus a h ad cylindrum k l, habeat linea o p ad p n: centrum grauitatis totius figuræ circũscriptæ erit punctum p. Sed cylindri, qui sunt æquali altitudine, eandem inter se se, quam bases proportionem habent: estq; ut linea d b ad b m, ita quadratũ lineæ a d ad quadratũ ipsius k m, ex uigesima primi libri conicorũ: & ita quadratum a c ad quadratũ k g: hoc est circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum k g. dupla est autem linea d b lineæ b m.

8. primi libri Archimedis

11. duodecimi.

15. quinti

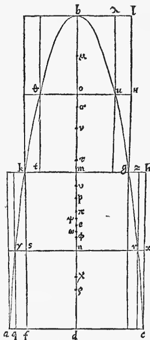
2. duodecimi.



b m. ergo circulus a c circuli k g: & idcirco cylindrus a h cylindri k l duplus erit. quare & linea o p dupla ipsius p n. Deinde inscripta & circumscripta portioni alia figura, ita ut inscripta constituatur ex tribus cylindris q r, s g, t u: circumscripta uero ex quatuor a x, y z, κ ν, θ λ: diuidantur b o, o m, m n, n d bifariam in punctis μ ν π ρ. Itaque cylindri θ λ centrum grauitatis est punctum μ: & cylindri κ ν centrum ν. ergo si linea μ ν diuidatur in σ, ita ut μ σ ad σ ν proportionē eā habeat, quam cylindrus κ ν ad cylindrum θ λ, uidelicet quam quadratum κ m ad quadratum θ o, hoc est, quam linea m b ad b o: erit σ centrum magnitudinis compositæ ex cylindris κ ν, θ λ. & cum linea m b sit dupla b o, erit & μ σ ipsius σ ν dupla. præterea quoniam cylindri y z centrum grauitatis est π, linea σ π ita diuisa in τ, ut σ τ ad τ π eam habeat proportionem, quam cylindrus y z ad duos cylindros κ ν, θ λ: erit τ centrum magnitudinis, quæ ex dictis tribus cylindris constat. cylindrus autē y z ad cylindrum θ λ est, ut linea n b ad b o, hoc est ut 3 ad 1: & ad cylindrum κ ν, ut n b ad b m, uidelicet ut 3 ad 2. quare y z cylīdrus duobus cylindris κ ν, θ λ æqualis erit. & propterea linea σ τ æqualis ipsi τ π. denique cylindri a x centrum grauitatis est punctum ρ. & cum τ ρ diuisa fuerit in eā proportionem, quam habet cylindrus a x ad tres cylindros y z, κ ν, θ λ: erit in eo puncto centrum grauitatis totius figuræ circūscriptæ. Sed cylindrus a x ad ipsum y z est ut linea d b ad b n: hoc est ut 4 ad 3: & duo cylindri κ ν θ λ cylindro y z sunt æquales. cylindrus igitur a x ad tres iam dictos cylindros est ut 2 ad 3. Sed quoniā μ σ est duarum partium, & σ ν unius, qualium μ π est sex; erit σ π partium quatuor: propterea; τ π duarum, & ν π, hoc est π ρ trium. quare sequitur ut punctum π totius figuræ circumscriptæ sit centrum. Itaque fiat ν υ ad υ π, ut μ σ ad σ ν. & υ ρ bifariam diuidatur in φ. Similiter ut in circumscripta figura ostendetur centrum magnitudinis compositæ ex cylin-

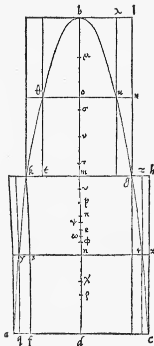
20. primi conicorū

dris s g, tu esse punctum υ: & totius figuræ inscriptæ, quæ cōstat ex cylindris q r, s g, tu esse φ centrum. Sunt enim hi cylindri æquales & similes cylindris y z, K η, θ λ, figuræ circumscriptæ. Quoniã igitur ut b e ad e d, ita est o p ad p n; utraq; enim utriusque est dupla: erit componendo, ut b d ad d e, ita o n ad n p; & permutando, ut b d ad o n, ita d e ad n p. Sed b d dupla est o n. ergo & e d ipsius n p dupla erit. quòd si e d bifariam diuidatur ĩ χ, erit χ d, uel e χ æqualis n p: & sublata e n, quæ est cōmunis utrique e χ, p n,



relin-

relinquetur p e ipsi n χ æqualis. cum autem b e sit dupla e d, & o p dupla p n, hoc est ipsius e χ, & reliquum, uidelicet b o unà cum p e ipsius reliqui χ d duplum erit. estque 19 quinti
b o dupla ρ d. ergo p e, hoc est n χ ipsius χ ρ dupla. sed d n dupla est n ρ. reliqua igitur d χ dupla reliquæ χ n. sunt autem d χ, p n inter se æquales: itemq; æquales χ n, p e. quare constat n p ipsius p e duplam esse. & idcirco p e ipsi e n æqualem. Rursus cum sit μ ν dupla o ν, & μ σ dupla σ ν; erit etiam reliqua ν σ reliquæ σ o dupla. Eadem quoque ratione cõcludetur π υ dupla υ m. ergo ut ν σ ad σ o, ita π υ ad υ m: componendoq; & permutando, ut ν o ad π m, ita o σ ad m υ: & sunt æquales ν o, π m. quare & o σ, m υ æquales. præterea σ π dupla est π τ, & ν π ipsius π m. reliqua igitur σ ν reliquæ m τ dupla. atque erat ν σ dupla σ o. ergo m τ, σ o æquales sunt: & ita æquales m υ, n φ. at o σ, est æqualis m υ. Sequitur igitur, ut omnes o σ, m τ, m υ, n φ inter se sint æquales. Sed ut ρ π ad π τ, hoc est ut 3 ad 2, ita n d ad d χ: permutãdoq; ut ρ π ad n d, ita π τ ad d χ. & sũt æquales ρ π, n d. ergo d χ, hoc est n p, & π τ æquales. Sed etiam æquales n π, π m. reliqua igitur π p reliquæ m τ, hoc est ipsi n φ æqualis erit. quare dempta p π ex p e, & φ n dempta ex n e, relinquitur p e æqualis e ψ. Itaque π, φ centra figurarũ secundo loco descriptarum a primis centris p n æquali interuallo recedunt. quòd si rursus aliæ figuræ describantur, eodem modo demonstrabimus earum centra æqualiter ab his recedere, & ad portionis conoidis centrum propius admoueri. Ex quibus constat lineam π φ à centro grauitatis portionis diuidi in partes æquales. Si enim fieri potest, non sit centrum in puncto e, quod est lineæ π φ medium: sed in ψ: & ipsi π ψ æqualis fiat φ ω. Cum igitur in portione solida quædam figura inscribi possit, ita ut linea, quæ inter centrum grauitatis portionis, & inscriptæ figuræ interiicitur, qualibet linea proposita sit minor, quod proxime demonstrauimus: perueniet tandem φ centrum inscriptæ figuræ


b
λ
l
μ
θ
o
u
n
σ
ν
τ
k
t
m
z
h
g
ρ
π
ψ
e
ω
φ
n
y
s
x
χ
ϛ
a
q
f
d
c

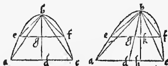
ad punctum ω. Sed quoniam π circumscripta itidem alia figura æquali interuallo ad portionis centrum accedit, ubi primum φ applicuerit se ad ω, & π ad punctũ ψ, hoc est ad portionis centrum se applicabit. quod fieri nullo modo posse perspicuum est. non aliter idem absurdum sequetur, si ponamus centrum portionis recedere à medio ad partes ω; esset enim aliquando centrum figuræ inscriptæ idem quod portionis centrũ. ergo punctum e centrum erit grauitatis portionis a b c. quod demonstrare oportebat.

Quod autem supra demõstratum est in portione conoidis recta per figuras, quæ ex cylindris æqualem altitudinem habentibus constant, idem similiter demonstrabimus per figuras ex cylindri portionibus constantes in ea portione, quæ plano non ad axem recto abscinditur. ut enim tradidimus in commentariis in undecimam propositionem libri Archimedis de conoidibus & sphæroidibus. portiones cylindri, quæ æquali sunt altitudine, eam inter se proportionem habent, quam ipsarum bases: bases autẽ quæ sunt ellipses similes eandem proportionem habere, quam quadrata diametrorum eiusdem rationis, ex corollario septimæ propositionis libri de conoidibus, & sphæroidibus, manifeste apparet. corol. 15 de conoidibus & sphæroidibus.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXX.

Si à portione conoidis rectanguli alia portio abscindatur, plano basi æquidistante; habebit portio tota ad eam, quæ abscissa est, duplam proportionem eius, quæ est basis maioris portionis ad basim minoris, uel quæ axis maioris ad axem minoris.

ABSCINDATVR à portione conoidis rectanguli a b c alia portio e b f, plano basi æquidistante: & eadem portio secetur alio plano per axem; ut superficiei sectio sit parabole a b c: planorũ portiones abscindentium rectæ lineæ a c, e f: axis autem portionis, & sectionis diameter b d; quam linea e f in puncto g secet. Dico portionem conoidis a b c ad portionem e b f duplam proportionem habere eius, quæ est basis a c ad basim e f; uel axis d b ad b g axem. Intelligantur enim duo coni, seu coni portiones a b c, e b f, eãdem basim, quam portiones conoidis, & æqualem habentes altitudinem. & quoniam a b c portio conoidis sesquialtera est coni, seu portionis coni a b c; & portio e b f coni seu portionis coni e b f est sesquialtera, quod de-



monstrauit Archimedes in propositionibus 23, & 24 libri de conoidibus, & sphæroidibus: erit conoidis portio ad conoidis portionem, ut conus ad conum, uel ut coni portio ad coni portionem. Sed conus, uel coni portio a b c ad conum, uel coni portionem e b f compositam proportionem habet ex proportione basis a c ad basim e f, & ex proportione altitudinis coni, uel coni portionis a b c ad altitudinem ipsius e b f, ut nos demonstrauimus in commentariis in undecimam propositionem eiusdem libri Archimedis: altitudo autem ad altitudinem est, ut axis ad axem. quod quidem in conis rectis perspicuum est, in scalenis ue

ro ita demonſtrabitur. Ducatur à puncto b ad planum baſis a c perpendicularis linea b h, quæ ipſam e f in K ſecet. erit b h altitudo coni, uel coni portionis a b c: & b K altitudo e f g. Quod cum lineæ a c, e f inter ſe æquidiſtent, ſunt enim planorum æquidiſtantium ſectiones: habebit d b ad b g proportionem eandem, quam h b ad b K. quare portio conoidis a b c ad portionem e f g proportionem habet compoſitam ex proportione baſis a c ad baſim e f; & ex proportione d b axis ad axem b g. Sed circulus, uel ellipſis circa diametrum a c ad circulum, uel ellipſim circa e f, eſt ut quadratum a c ad quadratum e f; hoc eſt ut quadratū a d ad quadratū e g. & quadratum a d ad quadratum e g eſt, ut linea d b ad lineam b g. circulus igitur, uel ellipſis circa diametrum a c ad circulū, uel ellipſim circa e f, hoc eſt baſis ad baſim eandem proportionem habet, quã d b axis ad axem b g. ex quibus ſequitur portionem a b c ad portionem e b f habere proportionem duplam eius, quæ eſt baſis a c ad baſim e f: uel axis d b ad b g axem. quod demonſtrandum proponebatur.

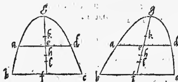
16. undecimi.
4 ſexti.
2. duodecimi
7. de conoidibus & ſphæroidibus
15. quinti
20. primi conicorũ

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXI.

Cuiuslibet fruſti à portione rectanguli conoidis abſciſsi, centrum grauitatis eſt in axe, ita ut demptis primum à quadrato, quod fit ex diametro maioris baſis, tertia ipſius parte, & duabus tertiis quadrati, quod fit ex diametro baſis minoris: deinde à tertia parte quadrati maioris baſis rurſus dempta portione, ad quam reliquum quadrati baſis maioris unà cum dicta portione duplã proportionem habeat eius, quæ eſt quadrati ma-

ioris basis ad quadratum minoris: centrum sit in eo axis puncto, quo ita diuiditur ut pars, quæ minorem basim attingit ad alteram partem eandem proportionem habeat, quam dempto quadrato minoris basis à duabus tertiis quadrati maioris, habet id, quod reliquum est unà cum portione à tertia quadrati maioris parte dempta, ad reliquã eiusdem tertiæ portionem.

SIT frustum à portione rectanguli conoidis abscissum a b c d, cuius maior basis circulus, uel ellipsis circa diametrum b c, minor circa diametrum a d; & axis e f. describatur autem portio conoidis, à quo illud abscissum est, & pla-



no per axem ducto secetur; ut superficiei sectio sit parabole b g c, cuius diameter, & axis portionis g f. deinde g f diuidatur in puncto h, ita ut g h sit dupla h f: & rursus g e in eandem proportionem diuidatur: sitq; g k ipsius k e dupla. Iã ex iis, quæ proxime demonstrauimus, constat centrum grauitatis portionis b g c esse h punctum: & portionis a g c punctum k. sumpto igitur infra h puncto l, ita ut k h ad h l

eam proportionem habeat, quam a b c d frustum ad portionem a g d; erit punctum l eius frusti grauitatis cētrum: habebitq; componendo K l ad l h proportionem eandem, quam portio conoidis b g c ad a g d portionem. Itaq; quoniam quadratum b f ad quadratum a e, hoc est quadratum b c ad quadratum a d est, ut linea f g ad g e: erunt duæ tertiæ quadrati b c ad duas tertias quadrati a d, ut h g ad g k: & si à duabus tertiis quadrati b c demptæ fuerint duæ tertiæ quadrati a d: erit diuidēdo id, quod relinquitur ad duas tertias quadrati a d, ut h k ad k g. Rursus duæ tertiæ quadrati a d ad duas tertias quadrati b c sunt, ut k g ad g h: & duæ tertiæ quadrati b c ad tertiā partē ipsius, ut g h ad h f. ergo ex æquali id, quod relinquitur ex duabus tertiis quadrati b c, demptis ab ipsis quadrati a d duabus tertiis, ad tertiā partem quadrati b c, ut k h ad h f: & ad portionem eiusdē tertiæ partis, ad quam unà cum ipsa portione, duplam proportionem habeat eius, quæ est quadrati b c ad quadratū a d, ut K l ad l h. habet enim K l ad l h eandem proportionem, quam conoidis portio b g c ad portionem a g d: portio autem b g c ad portionem a g d duplam proportionem habet eius, quæ est basis b c ad basim a d: hoc est quadrati b c ad quadratum a d; ut proxime demonstratum est. quare dempto a d quadrato à duabus tertiis quadrati b c, erit id, quod relinquitur unà cum dicta portione tertiæ partis ad reliquam eiusdem portionem, ut e l ad l f. Cum igitur centrum grauitatis frusti a b c d sit l, à quo axis e f in eam, quā diximus, proportionem diuidatur; constat uerū esse illud, quod demonstrandum proposuimus.

20.1.conicorum.

30 huius

FINIS LIBRI DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM.

Impress. Bononiæ cum licentia Superiorum.